

Maciej Michałek

*Sterowanie metodą
orientowania pól wektorowych
dla podklasy systemów
nieholonomicznych*

Rozprawa Doktorska

*Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów*

POZNAŃ 2006

Praca zrealizowana w ramach grantu promotorskiego MNI 3 T11A 009 27

Przedmowa

Wsparcie, które otrzymałem od wielu osób w ciągu ostatnich kilku lat powoliło mi na podjęcie i finalizację moich pierwszych prac naukowo-badawczych. Owocem tych prac jest niniejsza rozprawa.

Pragnę podziękować mojemu Promotorowi – Panu Profesorowi Krzysztofowi Kozłowskiemu – za daną mi swobodę twórczą, tak ważną dla młodego badacza, oraz za opiekę merytoryczną i wsparcie, którego udzielał mi na forum naukowym.

Szczerze dziękuję także mojemu starszemu Koledze – Piotrowi Dutkiewiczowi – za zrozumienie, pomoc, inspiracje i wsparcie nie tylko naukowe.

Wiele życzliwości doświadczyłem również od wszystkich Kolegów i Koleżanek, którym dziękuję również za to, że zawsze we mnie wierzyli.

Szczególne dzięki składam wszystkim najbliższym mi Osobom, a przede wszystkim Rodzicom, bez których nie dałbym rady podjąć wysiłku ostatnich lat.

Poznań, w czerwcu 2006 roku.

Streszczenie

Niniejsza rozprawa prezentuje wyniki teoretyczne oraz eksperymentalne dotyczące nowej metody projektowania praw sterowania dedykowanej dla podklasy systemów nieholonomicznych¹. Nowa koncepcja, nazwana metodą orientowania pól wektorowych (w skrócie VFO), wynika z prostej i intuicyjnej interpretacji geometrycznej własności modeli wspomnianych systemów, a tym samym ze sposobu ewolucji rozwiązań równań tych modeli w odpowiedzi na specyficzne sygnały sterujące. Proponowana interpretacja pozwala na podzielenie procesu sterowania na dwa podprocesy: orientowanie i popychanie. Wydzielenie takich właśnie podprocesów nasuwa przypuszczenie, iż metoda VFO stanowi uogólnienie koncepcji sterowania we współrzędnych biegunowych.

Praca przedstawia zastosowanie nowej metodologii do wyprowadzenia sterowników dla czterech przykładowych systemów dynamicznych takich, jak robot dwukołowy, manipulator nieholonomiczny, system łańcuchowy oraz system z dryfem pozwalając na rozwiązanie dwóch zadań sterowania: śledzenia trajektorii zmiennych w czasie oraz stabilizacji w punkcie. Uzyskane prawa sterowania mają naturę nieciągłą (w sensie C^0), gwarantują szybkość i nieoscylacyjną zbieżność błędów regulacji, posiadają intuicyjną interpretację oddziaływania poszczególnych składników sterowania, a także charakteryzują się prostotą ogólnej struktury równań oraz prostotą ich parametrycznej syntezy.

Efektywność wszystkich zaproponowanych sterowników ilustrują wyniki badań symulacyjnych. Jakość sterowania VFO potwierdzają również wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych z wykorzystaniem nowej modułowej konstrukcji kołowego robota mobilnego.

¹Praca została zrealizowana w ramach grantu promotorskiego MNIi 3 T11A 009 27.

Abstract

The thesis presents theoretical and experimental results concerning a new control desing method dedicated to subclass of nonholonomic systems. The new concept, called as a Vector Field Orientation method (VFO), comes from a simple and intuitive geometrical interpretation subjected to model features of mentioned systems, thus subjected to time-evolution of model solutions in a response to specific controls. Proposed interpretation allows to divide the control process into two subprocesses: orienting and pushing. Distinguishing such subprocesses allows to state, that the VFO method exemplifies a generalization of control in polar coordinates.

This work shows the usage of the new methodology for controllers derivation dedicated to four examples of dynamic systems like two-wheeled mobile robot, nonholonomic manipulator, chained system and system with a drift allowing to solve two control tasks: trajectory tracking and point stabilization. Obtained control laws have a discontinuous nature (in a C^0 sense), guarantee fast and non-oscillatory regulation errors convergence, possess an intuitive interpretation of control action for particular control components, and are characterized by simplicity of equations in a general form and simplicity of its parametric synthesis.

Effectiveness of all proposed controllers is illustrated by simulation results. Experimental results obtained with a new modular wheeled mobile robot also confirm the quality of the VFO control laws.

Spis treści

Notacja i terminologia	1
1 Wprowadzenie	4
1.1 Motywacja	4
1.2 Przegląd istniejących rozwiązań	6
1.2.1 Iteracyjne planowanie ruchu	6
1.2.2 Sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym	7
1.3 Zakres i wkład rozprawy	16
2 Metodologia VFO	19
2.1 Interpretacja geometryczna	19
2.2 Terminologia	23
2.2.1 Podstawowe definicje	24
2.2.2 Podział trajektorii referencyjnych	29
2.3 Stosowalność metody VFO	30
2.4 Podsumowanie	32
3 Zastosowania metody VFO	33
3.1 Dwukołowy robot mobilny	33
3.1.1 Wykorzystanie metodologii VFO	36
3.1.2 Zadanie śledzenia trajektorii	39
3.1.3 Zadanie stabilizacji w punkcie	46
3.1.4 Wyniki badań symulacyjnych	53
3.1.5 Podsumowanie	63
3.2 Manipulator z przekładniami nieholonomicznymi	69
3.2.1 Wykorzystanie metodologii VFO	74
3.2.2 Zadanie śledzenia trajektorii	76
3.2.3 Zadanie stabilizacji w punkcie	82
3.2.4 Wyniki badań symulacyjnych	89
3.2.5 Podsumowanie	90
3.3 System łańcuchowy	98
3.3.1 Wykorzystanie metodologii VFO	101

3.3.2	Zadanie śledzenia trajektorii	103
3.3.3	Zadanie stabilizacji w punkcie	108
3.3.4	Wyniki badań symulacyjnych	114
3.3.5	Podsumowanie	115
3.4	System afiniczny z dryfem	122
3.4.1	Wykorzystanie metodologii VFO	125
3.4.2	Prawo sterowania VFO	127
3.4.3	Wyniki badań symulacyjnych	132
3.4.4	Podsumowanie	133
3.5	Uogólnienia i komentarze	136
4	Metoda VFO w świetle istniejących rozwiązań	140
4.1	Klasyfikacja metody	140
4.2	Analiza porównacza	142
5	Podsumowanie i dalsze kierunki badań	151
5.1	Podsumowanie	151
5.2	Dalsze kierunki badań	152
6	Stanowisko badawcze	154
6.1	Modułowa konstrukcja systemu MMS	154
6.2	Dwukołowy pojazd mobilny	155
6.3	Szczegóły realizacji układu sterowania	157
6.3.1	Obwód regulacji prędkości koła robota	157
6.3.2	Nadrzędny obwód sterowania robotem	160
6.3.3	Wybrane zagadnienia implementacji algorytmów VFO	163
7	Wyniki badań eksperymentalnych	165
7.1	Zadanie śledzenia trajektorii	165
7.2	Zadanie stabilizacji	167
7.3	Komentarze i podsumowanie	168
A	Definicje niestandardowych funkcji	180
A.1	Funkcja $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$	180
B	Wyprowadzenia wyrażeń pomocniczych	181
B.1	Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.1)	181
B.2	Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.81)	183
B.3	Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.156)	184
B.4	Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.238)	186
C	Dyskretna implementacja bloku regulatora w obwodzie regulacji prędkości koła robota MMS	187

Notacja i terminologia

W tekście przyjęto następujące założenia oraz notację matematyczną:

- wektory, pola wektorowe i funkcje wektorowe oznaczone są małymi literami pismem półgrubym, np. $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,
- wektor zerowy w \mathbb{R}^n , $n > 1$ oznaczono jako $\mathbf{0}$,
- wymiar wektora $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ określa operator $\dim(\mathbf{z}) = n$,
- nawias Liego dwóch pól wektorowych $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ oznaczono jako $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$,
- macierze o wymiarach $n \times m$, $m > 1$ oznaczono wielkimi literami pismem półgrubym, np. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
- rząd i wyznacznik macierzy \mathbf{A} oznaczono odpowiednio jako: $\text{rank}(\mathbf{A})$ oraz $\det(\mathbf{A})$,
- wielkości skalarne (zmiennie, funkcje i stałe) pisane są małymi literami pismem zwykłym, np. $f \in \mathbb{R}$,
- funkcję k o nieznanym lub niezdefiniowanym argumentach oznaczono jako $k(\cdot)$, a przy częściowym nieokreśleniu argumentów jako np. $k(x, y, \cdot)$,
- do oznaczenia zmiennej czasu rzeczywistego zastosowano literę $\tau \in \mathbb{R}_+$; ponadto przyjęto (bez utraty ogólności rozważań), że chwila początkowa $\tau_0 = 0$ dla wszelkich analizowanych przebiegów czasowych; warunek początkowy dla sygnału $\mathbf{z}(\tau)$ oznaczono jako $\mathbf{z}(0)$ lub \mathbf{z}_0 ,
- pochodne sygnałów liczone względem zmiennej czasu τ oznaczono symbolami kropek (do trzeciej pochodnej włącznie) lub symbolem cyfry w nawiasie, mianowicie: $\frac{dx}{d\tau} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{d\tau^2} = \ddot{x}$, $\frac{d^3x}{d\tau^3} = \dddot{x}$, $\frac{d^4x}{d\tau^4} = x^{(4)}$ itd.,
- dla wszystkich zadań sterowania sygnały referencyjne oznaczane są indeksem t (od słowa ang. *trajectory*²), np. \mathbf{z}_t lub x_t ; sygnały rzeczywiste (odpowiedź sterowanego systemu) oznaczane są bez indeksów, tj. \mathbf{z} lub x , odpowiednio; pomocnicze sygnały oznaczane będą indeksem a , np. \mathbf{z}_a lub x_a ,

²Stały punkt referencyjny w zadaniu stabilizacji traktowany będzie jako szczególny przypadek trajektorii zgodnie z podejściem prezentowanym w pracy [MS04].

- zbiory i przestrzenie wektorowe oznaczono dużymi literami następującym krojem:
 $\mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathcal{E}$,
- znaki $*$ używane są w celu wskazania wymiaru wektora (przestrzeni) w stosunku do wymiaru wektora (przestrzeni) oryginalnego pisanego bez znaku $*$, np. dla $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ wektory \mathbf{z}^* oraz \mathbf{z}^{**} mają następujące wymiary: $\dim(\mathbf{z}^*) = n - 1$, $\dim(\mathbf{z}^{**}) = n - 2$ itd.; dla przestrzeni $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ przestrzeń $\mathcal{Q}^* \subset \mathbb{R}^{n-1}$,
- funkcje znaku argumentu (*signum*) definiuje się i oznacza dwojako:

$$\text{sgn}(z) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{dla } z \geq 0, \\ -1, & \text{dla } z < 0 \end{cases}$$

lub

$$\text{sign}(z) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{dla } z > 0, \\ 0, & \text{dla } z = 0, \\ -1, & \text{dla } z < 0. \end{cases}$$

- czteroćwiartkową funkcję arctan oznaczano jako dwuargumentowy operator $\text{Atan2}(a, b)$, przy czym $\beta = \text{Atan2}(a, b) \in [-\pi, \pi]$ lub $\beta = \text{Atan2}(a, b) \in \mathbb{S}^1$,
- uciągniętą wersję funkcji $\text{Atan2}(a, b)$ oznaczono symbolem $\text{Atan2c}(a, b)$ co oznacza, że $\beta = \text{Atan2c}(a, b) \in [-\pi d, \pi d]$, $d \in \mathbb{N}$ lub inaczej $\beta = \text{Atan2c}(a, b) \in \mathbb{R}$.

Ponadto w pracy wykorzystano następujące symbole i wyrażenia:

$\ \mathbf{z}\ $	norma euklidesowa wektora (pola wektorowego) \mathbf{z} ,
\triangleq	równość z definicji,
\equiv	tożsamość,
$a \stackrel{(10)}{\equiv} b$	równość a i b na podstawie równania (10),
$a \xrightarrow{(10)} b$	zbieżność a do b na podstawie równania (10),
\forall, \exists	kwantyfikatory: ogólny i szczegółowy,
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	implikacja i równoważność,
\approx	równość przybliżona,
\propto	proporcjonalność,
\oplus	znak konkatencji,
$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$	równoległość wektorów (pól wektorowych) \mathbf{a} i \mathbf{b} ,
$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$	zgodną równoległość wektorów (pól wektorowych) \mathbf{a} i \mathbf{b} ,
$\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$	przeciwłą równoległość wektorów (pól wektorowych) \mathbf{a} i \mathbf{b} ,
$\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	kąt skierowany między wektorami (polami wek.) \mathbf{a} i \mathbf{b} : $\sphericalangle \in (-\pi, \pi]$,
$\sphericalleftarrow(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	kąt nieskierowany między wektorami (polami wek.) \mathbf{a} i \mathbf{b} : $\sphericalleftarrow \in [0, \pi]$,

$a(\bar{\tau}_-)$	granica lewostronna funkcji $a(\tau)$ w punkcie $\bar{\tau}$: $\lim_{\tau \rightarrow \bar{\tau}_-} a(\tau)$,
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}$	zbiór liczb odpowiednio: rzeczywistych, rzeczywistych dodatnich, naturalnych,
\mathbb{R}^k	przestrzeń euklidesowa k -wymiarowa,
\mathbb{S}^k	sfera k -wymiarowa,
\mathcal{L}_∞^r	zbiór ograniczonych funkcji \mathbf{f} o wymiarze $\dim(\mathbf{f}) = r$,
\mathcal{C}^k	zbiór funkcji f ciągłych wraz z k -tą pochodną,
\mathcal{K}	zbiór ciągłych, ściśle rosnących funkcji $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \kappa(0) = 0$,
\mathcal{K}_∞	zbiór funkcji $\kappa \in \mathcal{K}$ takich, że $\kappa(\infty) = \infty$,
\mathcal{Q}	przestrzeń konfiguracyjna (stanu) zawarta w \mathbb{R}^n ,
\mathcal{TQ}	przestrzeń styczna przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{Q} ,
\mathcal{U}	przestrzeń sterowań zawarta w \mathbb{R}^m ,
$\{G\}$	ortogonalny układ współrzędnych G ,
$\{x, y\}$	ortogonalny układ współrzędnych w przestrzeni $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$.

W celu zwiększenia przejrzystości tekstu, funkcje (skalarne i wektorowe) często zapisano z pominięciem części lub wszystkich ich argumentów, jeżeli zależność danej funkcji od jej argumentów jest oczywista lub chwilowo nieistotna.

Kilka słów o terminologii

Na potrzeby pracy wprowadzone zostały skróty oraz terminy, których znaczenie wyjaśniono poniżej.

W celu uproszczenia zapisu wprowadzono skrót VFO (od słów angielskich *Vector Fields Orientation*), którego użycie będzie równoważne przywołaniu nazwy metody *orientowania pól wektorowych*.

Pod pojęciem *sygnałów referencyjnych*, powszechnie używanym w literaturze z zakresu robotyki, zawarto określenie sygnałów definiujących zadanie sterowania. Pojęcie to należy traktować jako synonim określeń *sygnały zadane* lub *sygnały odniesienia* przyjętych w literaturze z zakresu automatyki.

Poprzez *pole wektorowe zbieżności* $\mathbf{h}(\mathbf{a}(\tau))$ należy rozumieć takie pole wektorowe, które w danym punkcie $\mathbf{a}(\tau)$ tego pola definiuje pożądaný kierunek ruchu gwarantujący zbieżność stanu rozważanego systemu dynamicznego do stanu referencyjnego zdeternowanego zadaniem sterowania. Celem wprowadzenia takiej terminologii jest wskazanie roli jaką odgrywa owo wyróżnione pole w procesie sterowania.

Wprowadzenie

Rozprawa prezentuje wyniki prac prowadzonych przez autora w ciągu ostatnich kilku lat w zakresie opracowania i weryfikacji nowych algorytmów sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu przeznaczonych do zadań śledzenia i stabilizacji dla klasy bezdryfowych systemów dynamicznych z nieholonomicznymi ograniczeniami prędkościowymi. Wybrana tematyka badań należy do aktualnie dynamicznie rozwijanej dziedziny nieliniowej teorii sterowania. Szczegółową motywację podjętych prac przedstawiono w następnym paragrafie. Po przedstawieniu aktualnego stanu wiedzy na temat metod sterowania systemów nieholonomicznych, zdefiniowano obszar problemowy poruszany w rozprawie oraz wyszczególniono wkład prezentowanej pracy w rozwój podjętej problematyki.

1.1 Motywacja

Systemy nieholonomiczne stanowią interesującą, zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia, klasę nieliniowych układów dynamicznych. Przedmiotem rozważań jest pewna rodzina systemów bezdryfowych, które można przedstawić w następującej postaci ogólnej:

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \quad \dim(\mathbf{q}) = n > m, \quad (1.1)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_n]^T \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ stanowi wektor stanu (lub wektor zmiennych konfiguracyjnych), $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_m]^T \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń (sygnałów sterujących), $\mathbf{g}_i(\mathbf{q})$ są podstawowymi polami wektorowymi – tzw. generatorami, a $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jest macierzą kinematyki. Założymy także, iż sposób ewolucji systemu (1.1) wynika nie tylko z przebiegu sygnałów sterujących \mathbf{u} , ale także z występowania pewnych specyficznych ograniczeń nałożonych na przebieg pochodnych $\dot{\mathbf{q}}$ wektora stanu. Istnienie takich ograniczeń w postaci niecałkowalnych więzów kinematycznych¹

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \tau) = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

gdzie $\tau \in [0, \infty)$ oznacza zmienną czasu, sprawia, iż pomimo pełnej sterowalności rozważanego systemu nieholonomicznego osiągnięcie przez niego poszczególnych punktów przestrzeni kon-

¹Czyli niecałkowalnych ograniczeń pierwszego rzędu.

figuracyjnej \mathcal{Q} nie może odbywać się w sposób dowolny. Wspomniane ograniczenia, a także mniejsza wymiarowość wektora sterowań w stosunku do wymiarowości wektora stanu ($n > m$) znacznie komplikują w sensie jakościowym algorytmy sterowania takimi systemami w porównaniu z metodami znanymi z klasycznej liniowej teorii sterowania. Podstawowe trudności wynikają bezpośrednio ze znanego od lat osiemdziesiątych twierdzenia Brocketta, które dowodzi, iż *nie istnieje w sposób ciągły różniczkowalne i niezależne jawnie od czasu sprzężenie zwrotne od stanu gwarantujące asymptotyczną stabilizację dla tego typu systemów [Bro83]*. Co więcej, analiza takich systemów znanymi metodami aproksymacyjnymi nie daje oczekiwanych rezultatów². Kwestie związane ze sterowaniem ze sprzężeniem zwrotnym dla układów nieholonomicznych stanowią zatem ważny i interesujący temat rozważań teoretycznych. Z drugiej strony, wiele systemów o dużym znaczeniu praktycznym (szczególnie o charakterze mechanicznym) należy do klasy układów nieholonomicznych. Przykładami takich systemów mogą być kołowe roboty mobilne o ograniczonej mobilności, manipulatory z przekładniami nieholonomicznymi, statki nawodne i podwodne, statki powietrzne czy wielopalczaste urządzenia chwytne. Podstawową zaletą układów nieholonomicznych jest możliwość osiągnięcia dowolnego punktu w wielowymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ przy silnie ograniczonej wymiarowości przestrzeni sterowań $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $m < n$. W praktyce oznacza to zmniejszenie liczby napędów wymaganych do sterowania takimi systemami, a tym samym mniejszą masę, wymiary i koszt obiektów rzeczywistych. Ceną jednak jest znaczne skomplikowanie procesu sterowania.

Od około dwudziestu lat prace związane z rozwojem nowych sposobów sterowania dla różnych klas systemów nieholonomicznych stanowią bardzo intensywne pole badawcze szczególnie w kręgach automatyków i robotyków. Zaproponowano wiele alternatywnych rozwiązań pozwalających na lokalne bądź globalne rozwiązanie zadań śledzenia trajektorii, odtwarzania ścieżki i stabilizacji w punkcie dla wybranych modeli systemów. Można wymienić kilka ważnych kwestii, które nie znalazły jak dotąd w pełni satysfakcjonującego rozwiązania:

- globalny charakter zbieżności zmiennych stanu w przestrzeni konfiguracyjnej systemu,
- dobra jakość regulacji w stanach przejściowych niezależnie od warunków początkowych i dobra jakość statyczna,
- relatywnie niski koszt sterowania z uwzględnieniem praktycznych ograniczeń sygnałów sterujących,
- prostota równań proponowanych sterowników i prostota ich parametrycznej syntezy,
- odporność regulatorów na zaburzenia strukturalne modelu, zakłócenia w przestrzeni wejścia oraz szумы pomiarowe, a także
- unifikacja metody sterowania dla jak najszerszej klasy systemów i różnych zadań sterowania.

²Linearyzacja modelu (1.1) w dowolnym punkcie przestrzeni konfiguracyjnej prowadzi do systemu niesterowalnego.

Wspomniane wyżej problemy oraz duże znaczenie praktyczne systemów nieholonomicznych zmuszają zatem do ciągłego poszukiwania nowych, alternatywnych rozwiązań w zakresie metod sterowania i stanowią bezpośrednią motywację badań, których wyniki zamieszczono w prezentowanej pracy.

1.2 Przegląd istniejących rozwiązań

Krótki przegląd istniejących metod sterowania obejmuje rozwiązania wykorzystujące sprzężenie zwrotne od stanu, gdyż z takimi właśnie algorytmami związana jest tematyka pracy. Dodatkowo, uwaga skupiona zostanie na rozwiązaniach dotyczących przede wszystkim modeli kinematyki w ogólnej postaci (1.1).

1.2.1 Iteracyjne planowanie ruchu

Techniki planowania ruchu generalnie oparte są o sterowanie w torze otwartym. Żądaną trajektorię systemu można obliczyć w trybie wsadowym (*off-line*) przede wszystkim na podstawie znajomości początkowego \mathbf{q}_0 i zadanego \mathbf{q}_t punktu w przestrzeni konfiguracyjnej (brak sprzężenia od aktualnego stanu układu $\mathbf{q}(\tau)$). Techniki takie nie wykazują odporności na działanie zakłóceń zewnętrznych, błędów modelowania czy błędów pomiarowych występujących w trakcie ruchu rzeczywistego systemu. Zastosowanie jednak metod planowania ruchu w sposób iteracyjny z założonym kwantem czasu $T_p > 0$, gdzie kolejny etap planowania wynika bezpośrednio z bieżącej wartości $\mathbf{q}(nT_p)$, $n \in \mathbb{N}$ wektora stanu systemu, daje w efekcie, odcinkami ciągle, algorytmy ze sprzężeniem zwrotnym. Wspomniane zostaną zatem ważniejsze metody planowania ruchu, które mogą zostać wykorzystane w iteracyjnym procesie sterowania ze sprzężeniem od bieżącego stanu systemu $\mathbf{q}(nT_p)$.

Ogólną metodę planowania dla nieholonomicznych układów bezdryfowych zaproponowano w pracy [LS90]. Prezentowana metoda stosuje aparat geometrii różniczkowej dla systemów nilpotentnych lub podlegających nilpotentyzacji poprzez dodatkowe sprzężenie zwrotne. Metoda ta polega na poszukiwaniu sterowań (zwykle odcinkami stałych) dla systemu rozszerzonego o dodatkowe sterowania i pola wektorowe z algebry Liego, a następnie na obliczaniu sterowań dla modelu oryginalnego. Metoda ta zastosowana do układów nilpotentnych daje rozwiązanie dokładne, lecz może powodować problemy realizacyjne dla systemów nie posiadających tej cechy. W [MS93] zaprezentowano podejście, w którym pożądaný ruch systemów nieholonomicznych pierwszego i drugiego rzędu można uzyskać stosując sterowania sinusoidalne o specjalnie dobranych częstotliwościach. Wykorzystuje się tutaj specyficzne własności struktury modelu łańcuchowego. Zadanie planowania jest zdekomponowane na dwa etapy, gdzie w każdym z etapów rozważa się ewolucję jedynie pewnego podwektora zmiennych stanu w odpowiedzi na odpowiednio zaprojektowane sygnały wejściowe. Bogaty przegląd różnych technik planowania w odniesieniu do kołowych robotów mobilnych (zarówno prostych pojazdów jak i traktorów z przyczepami) zawiera pierwszy rozdział książki [LSL98], w którym zebrano między innymi techniki geometryczne, optymalizacyjne i probabilistyczne. Obszerny zbiór metod planowania dla układów nieholonomicznych można znaleźć także w pracach [KM95, LaV06] oraz [LO95]. Tematyce planowania ruchu, między innymi dla systemów nieholonomicznych, poświę-

cono także prace polskich autorów. W monografii [Dul01] przedstawiono liczne klasyczne i autorskie techniki planowania wykorzystujące metody interpolacyjne, aproksymacyjne, Lie-algebraiczne oraz optymalizacyjne. Propozycje lokalnych i globalnych technik specjalizowanych oraz ogólnego przeznaczenia zastosowanych do kołowych robotów mobilnych można znaleźć w pracy [TMD⁺00]. W monografii [Dul98] zaprezentowano wyłącznie metody oparte o algebrę Liego bezdryfowego systemu nieholonomicznego z wykorzystaniem reguł CBHD oraz gCBHD³. Metody Lie-algebraiczne poszukują wszystkich możliwych i liniowo niezależnych kierunków ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej rozważanego systemu definiowanych polami-generatorami \mathbf{g}_i oraz nawiasami Liego tych pól $[\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]$. Planowany ruch składany jest z sekwencji ruchów elementarnych wzdłuż pól-generatorów w taki sposób, aby wypadkowe przemieszczenie układu pozwalało na ewolucję w dowolnym z możliwych kierunków/pól wektorowych rozpinających całą przestrzeń stanu. Monografia [Dul98] oraz publikacje [DK05, BR95, LO01] przedstawiają przykłady iteracyjnego wykorzystania metod planowania do sterowania układami nieholonomicznymi, w których zadanie planowania w kroku i -tym wynika z wartości stanu systemu $\mathbf{q}(iT_p)$. Szczegóły dotyczące zagadnień planowania ruchu można znaleźć także w publikacjach cytowanych we wspomnianych pracach.

1.2.2 Sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym

Przejdziemy teraz do przeglądu algorytmów sterowania dla systemów nieholonomicznych, które w swojej strukturze z definicji wykorzystują sprzężenie zwrotne od stanu w celu uzyskania odporności proponowanego rozwiązania w odniesieniu do zakłóceń zewnętrznych oraz błędów modelowania⁴. W celu zwiększenia ścisłości i przejrzystości rozważań, na początku wprowadzone zostaną podstawowe definicje wykorzystywane w dalszej części tekstu.

Definiuje się trzy podstawowe i jakościowo różne zadania sterowania dla systemu (1.1) (patrz [LOS98, dWKSS93]):

- Z1. zadanie śledzenia trajektorii zmiennych w czasie,
- Z2. zadanie odtwarzania toru (ścieżki geometrycznej),
- Z3. zadanie stabilizacji w stałym punkcie referencyjnym.

W zadaniu Z1 zakłada się, że stan referencyjny jest zadaną i jawną funkcją czasu: $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_t(\tau)$. Czas w tym przypadku pełni rolę parametru toru referencyjnego w przestrzeni konfiguracyjnej.

Zadanie Z2 stanowi szczególny przypadek zadania Z1, w którym rezygnuje się z czasowej parametryzacji toru na rzecz parametryzacji, na przykład, krzywoliniową długością

³Skrót CBHD pochodzi od nazwisk Campbella-Bakera-Hausdorffa-Dynkina. Litera g umieszczona przed skrótem oznacza uogólnioną regułę CBHD [Dul98].

⁴Pewne algorytmy gwarantują odporność jedynie ze względu na niektóre rodzaje zakłóceń czy też błędy strukturalne lub parametryczne modelu [LMS98].

s toru: $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_t(s)$. Wśród wszystkich możliwych trajektorii i torów referencyjnych wyróżnia się zbiór \mathcal{T}_{AD} tzw. trajektorii i torów *dopuszczalnych* czyli takich, które spełniają ograniczenia sterowanego systemu opisane równaniem (1.2). Dodatkowo, w zbiorze wszystkich możliwych dopuszczalnych trajektorii referencyjnych wydziela się podzbiór \mathcal{T}_{PE} tzw. trajektorii *ustawicznie pobudzających*, które nakładają dodatkowe ograniczenia na sposób ewolucji stanu referencyjnego $\mathbf{q}_t(\tau)$. Najczęściej te dodatkowe ograniczenia wynikają z założenia o niezmiernianiu do zera dla wybranych składowych pola prędkości referencyjnej $\dot{\mathbf{q}}_t$.

Ostatnie zadanie sterowania (Z3) wynika z założenia, że stan referencyjny \mathbf{q}_t jest stałym (niezależnym od czasu) punktem w przestrzeni konfiguracyjnej: $d\mathbf{q}_t/d\tau \equiv \mathbf{0}$. W celu uproszczenia analizy matematycznej, w zadaniu stabilizacji bardzo często przyjmuje się (bez utraty ogólności rozważań) zerowy stan referencyjny: $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$.

Projektowanie sterowników ze sprzężeniem zwrotnym polega na znalezieniu pewnej funkcji sterującej o postaci ogólnej:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \in \mathcal{L}_\infty^m, \quad (1.3)$$

która zastosowana do układu (1.1) gwarantuje zbieżność pełnego stanu systemu \mathbf{q} do stanu referencyjnego \mathbf{q}_t . Zbieżność ta jest równoważna realizacji postawionych zadań Z1-Z3. Tak zdefiniowane cele sterowania w połączeniu z uwzględnieniem nieholonomicznej natury rozważanych systemów wymagają zastosowania nowych technik sterowania, ponieważ klasyczne metody liniowej oraz nieliniowej teorii sterowania nie dają oczekiwanych efektów [KM95, MS04]. Należy wspomnieć, iż osłabienie wymagań stawianych w powyższych zadaniach poprzez zastąpienie żądania zbieżności dla całego stanu \mathbf{q} żądaniem zbieżności jedynie wybranych wygnałów wyjścia $\mathbf{y}(\mathbf{q})$, gdzie $\dim(\mathbf{y}) \leq \dim(\mathbf{u})$, może prowadzić do uproszczenia problemu (szczególnie dla zadania Z3) i możliwości rozwiązania go metodami klasycznymi (np. z wykorzystaniem linearyzującego sprzężenia zwrotnego [dNCB95, NvdS90, dWSB96, OLV02, TKW02, JEKA05, Mu04]). Taki przypadek jednak nie będzie przedmiotem dalszych rozważań.

Realizacja zadań Z1-Z3 może być rozumiana w dwojakim sensie: asymptotycznym lub praktycznym. Poniżej podane zostaną ogólne definicje określające oba rodzaje realizacji.

Definicja 1.1 (Realizacja asymptotyczna) *Asymptotyczna realizacja zadań Z1-Z3 polega na znalezieniu takiej funkcji sterującej (1.3), która zastosowana do systemu (1.1) gwarantuje, że błąd regulacji $\mathbf{e}(\tau) \triangleq \mathbf{q}_t(\cdot) - \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ asymptotycznie zmierza do początku układu w przestrzeni błędów*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{e}(\tau) = \mathbf{0}$$

dla ograniczonych warunków początkowych $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$.

◇

Definicja 1.2 (Realizacja praktyczna [dWSB96]) *Praktyczna realizacja zadań Z1-Z3 polega na znalezieniu takiej funkcji sterującej (1.3), która zastosowana do systemu*

(1.1) gwarantuje, że błąd regulacji $\mathbf{e}(\tau) \triangleq \mathbf{q}_t(\cdot) - \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ w skończonym czasie zmierza do pewnego niezmienniczego zbioru $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ w otoczeniu początku układu

$$\exists \bar{\tau} < \infty : \quad \forall \tau \geq \bar{\tau} \quad \mathbf{e}(\tau) \in \mathcal{S}$$

dla ograniczonych warunków początkowych⁵ $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$. Powyższa definicja równoważna jest spełnieniu relacji:

$$\exists \bar{\tau} < \infty : \quad \forall \tau \geq \bar{\tau} \quad \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon,$$

gdzie $\epsilon > 0$ jest założonym tunelem dla normy błędu końcowego.

◇

Jeżeli $\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^n$, to powyższe realizacje mają charakter globalny.

W niniejszej pracy rozważane będą kwestie stabilności między innymi dla takich systemów ze sprzężeniem zwrotnym, dla których punkt stabilizacji \mathbf{q}_t (a tym samym punkt $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q} = \mathbf{0}$ w przestrzeni błędu) nie jest ich punktem równowagi. W takich przypadkach nie można rozważać stabilności (i stabilizacji) punktu $\mathbf{q} = \mathbf{q}_t$ w klasycznym ujęciu Lapunowa. Wprowadza się zatem pojęcia *asymptotycznej prawie stabilizacji*, a także *asymptotycznego prawie stabilizatora*, które pozwalają na formalną analizę zachowania się systemu zamkniętego w takiej sytuacji. Poniżej przedstawiono odpowiednie definicje sformułowane na podstawie prac [Ast96] oraz [KT02].

Definicja 1.3 (Asymptotyczna prawie stabilizacja) Dla systemu (1.1) dany jest stały punkt referencyjny \mathbf{q}_t oraz pewna funkcja sterująca $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}(\tau), \cdot)$. Dynamikę systemu zamkniętego opisuje następujące równanie:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{u}(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}(\tau), \cdot). \quad (1.4)$$

Mówimy, że funkcja $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}(\tau), \cdot)$ asymptotycznie prawie stabilizuje system (1.1) wokół punktu $\mathbf{q} = \mathbf{q}_t$ w pewnym otwartym i gęstym zbiorze Ω_0 , jeżeli:

- i) dla dowolnych warunków początkowych $\mathbf{q}(0) \in \Omega_0$ istnieją jednoznaczne rozwiązania $\mathbf{q}(\tau)$ systemu (1.4) dla $\tau \geq 0$,
- ii) dla dowolnych warunków początkowych $\mathbf{q}(0) \in \Omega_0$ dla systemu (1.4) zachodzi:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_t.$$

◇

Definicja 1.4 (Asymptotyczny prawie stabilizator) Dla systemu (1.1) dany jest stały punkt referencyjny \mathbf{q}_t . Mówimy, że funkcja sterująca $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}_t, \mathbf{q}(\tau), \cdot)$ jest asymptotycznym prawie stabilizatorem systemu (1.1), jeżeli asymptotycznie prawie stabilizuje system (1.1) wokół punktu $\mathbf{q} = \mathbf{q}_t$ w pewnym otwartym i gęstym zbiorze Ω_0 .

◇

⁵Realizacja praktyczna implikuje stabilność praktyczną punktu $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ lub inaczej ograniczoność końcową (ang. *ultimate boundedness*) błędu $\mathbf{e}(\tau)$ względem zbioru \mathcal{S} .

Z punktu widzenia szybkości zbieżności sygnału $\mathbf{e}(\tau)$ (do zera lub do zbioru \mathcal{S}), wyróżnia się dwa szczególne rodzaje zbieżności błędu regulacji:

- zbieżność κ -wykładniczą,
- zbieżność wykładniczą.

Definicja 1.5 (Zbieżność κ -wykładnicza [SE95]) Sygnał $\mathbf{e}(\tau) \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbieżny do zera w sposób κ -wykładniczy, jeżeli istnieje liczba $\lambda > 0$ oraz dodatnio określona, ściśle rosnąca funkcja⁶ $\kappa(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że:

$$\forall \tau \geq 0 \quad \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \kappa(\|\mathbf{e}(0)\|) \exp(-\lambda\tau)$$

dla każdego ograniczonego warunku początkowego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$.

◇

Definicja 1.6 (Zbieżność wykładnicza) Sygnał $\mathbf{e}(\tau) \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ jest zbieżny do zera w sposób wykładniczy, jeżeli istnieją liczby $\lambda, \xi > 0$ takie, że:

$$\forall \tau \geq 0 \quad \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \xi \|\mathbf{e}(0)\| \exp(-\lambda\tau)$$

dla każdego ograniczonego warunku początkowego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$.

◇

Z powyższych definicji wynika, że zbieżność wykładnicza jest szczególnym przypadkiem zbieżności κ -wykładniczej, gdzie funkcja $\kappa(\|\mathbf{e}(0)\|) \triangleq \xi \|\mathbf{e}(0)\|$ jest odwzorowaniem liniowym [SE95].

Literatura poruszająca zagadnienia sterowania ze sprzężeniem zwrotnym dla układów nieholonomicznych jest bardzo obszerna. Z tego względu poniżej przedstawiono jedynie krótki przegląd ważniejszych technik sterowania, przy czym jako kryterium wyboru opisanych poniżej metod przyjęto sposób i jakość realizacji poszczególnych zadań sterowania Z1-Z3.

Śledzenie trajektorii. Problem śledzenia trajektorii (ang. *trajectory tracking*) poruszany był przeważnie w odniesieniu do kołowych robotów mobilnych. Podejście oparte o pierwszą metodę Lapunowa (linearyzacja wokół dopuszczalnej trajektorii referencyjnej) zaproponowano w pracy [WTSL94] dla dwóch modeli robotów mobilnych: pojazdu jednokołowego i samochodu kinematycznego z napędem na przednią oś oraz dla systemu łańcuchowego 3-D. Uzyskano asymptotyczną zbieżność wykładniczą lecz wyniki miały charakter lokalny. Dodatkowo algorytm okazał się wymagający obliczeniowo [TMD⁺00]. Kanayama i współautorzy [KKMN90] zaproponowali nieliniowe prawo sterowania dla robota jednokołowego pozwalające na śledzenie trajektorii dopuszczalnych o zadanej stałej i dodatniej prędkości ruchu postępowego. Pomysł rozszerzyli Fierro i Lewis [FL97] rozważając dodatkowo poziom dynamiki napędów robota. Bardziej uniwersalne rozwiązanie przedstawiono w pracy [LSLT01], gdzie stosując technikę funkcji Lapunowa zagwarantowano

⁶Funkcję taką określa się mianem funkcji klasy \mathcal{K} .

asymptotyczne śledzenie trajektorii o charakterze linii prostych i łuków okręgów. Wyniki zbieżności miały charakter globalny. Dodatkowo uwzględnione zostały praktyczne ograniczenia sygnałów sterujących. Uchylenie wspomnianych ograniczeń dotyczących rodzaju dopuszczalnej trajektorii referencyjnej, poza własnością ustawicznego pobudzenia, można znaleźć w pracy [dWKSS93]. Zaproponowano tam dwa prawa sterowania: liniowe i jego uogólnienie nieliniowe dla wózka jednokołowego. Wersja nieliniowa pozwala na globalną asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia do zera (por. [SAA91, dWSB96]). Kilka innych propozycji zawiera publikacja przeglądowa [MS04]. Chwa w artykule [Chw04] wprowadził nieciągły sterownik ślizgowy dla wózka jednokołowego wyrażonego we współrzędnych biegunowych i uzyskał asymptotyczne śledzenie w obecności zakłóceń gaussowskich. Algorytm dopuszczał także fazy zatrzymania i nawrotu wzdłuż trajektorii zadanej. Wyniki miały charakter globalny z wyłączeniem niewielkiego otoczenia początku układu współrzędnych ze względu na osobliwość rozważanego modelu. Inny rodzaj systemu nieholonomicznego rozważyli Jiang i Nijmeijer [JN99]. Zastosowali oni ideę propagacji wstecznej z wykorzystaniem technik Lapunowa uzyskując asymptotyczne (lokalnie wykładnicze) śledzenie trajektorii dopuszczalnych dla n -wymiarowych systemów łańcuchowych. Wynikowy algorytm zastosowano do modelu samochodu kinematycznego z pojedynczą przyczepą, a w pracy [MN05] także do planarnego manipulatora nieholonomicznego o trzech ogniwach (oba systemy lokalnie transformowano do modelu łańcuchowego). Samochód kinematyczny był przedmiotem analizy w publikacji De Luci i współautorów [LOS98], gdzie problem śledzenia trajektorii stanu rozwiązano tylko dla modelu zlinearyzowanego w pobliżu trajektorii referencyjnej.

Dotychczas wspomniane podejścia dawały wyniki zbieżności o charakterze asymptotycznym. Realizację praktyczną zadania śledzenia dla prototypowego systemu zwanego w literaturze integratorem Brocketta (lub systemem Heisenberga) podali Bloch i Drakunov w pracy [BD95]. Zaproponowali oni nieciągły sterownik ślizgowy gwarantujący osiągnięcie założonego niezerowego otoczenia ϵ trajektorii referencyjnej w skończonym czasie. Zbieżność praktyczną, z założoną dokładnością, wzdłuż dopuszczalnej trajektorii referencyjnej, uzyskał również Dixon *et al.* [DDZZ00, DDZB01], adoptując do modelu robota jednokołowego koncepcję oscylatora kinematycznego o dynamicznie przestrajanej częstotliwości i amplitudzie, transformując jednocześnie błąd śledzenia do pewnej przestrzeni pomocniczej. Pozwoliło to na uzyskanie globalnej wykładniczej ograniczoności końcowej sygnału błędu regulacji. W [KM02] rozszerzono możliwości wspomnianego rozwiązania uwzględniając poziom dynamiki napędów robota. Kolejne rozszerzenie koncepcji Dixona przedstawił Pazderski *et al.* [PKa04] gwarantując praktyczne śledzenie także trajektorii nie spełniających ograniczeń kinematycznych sterowanego systemu. Zaproponowany sterownik wykazywał odporność na niepewność parametryczną modelu. Został on zastosowany do pojazdu z napędem ślizgowym (ang. *skid-steering robot*). Uogólnienie podejścia Dixona podali Samson i Morin stosując grupy Liego oraz metodę funkcji transwersalnych o przestrajanych częstotliwościach [MS03, AMS03, MS01b]. Również w tym przypadku uzyskano gwarancję praktycznego śledzenia dowolnych typów trajektorii z wybraną (lecz skończoną) dokładnością. Pierwsze wyniki w zakresie śledzenia trajektorii dla wózka jednokołowego, które zapoczątkowały prace nad metodologią orientowania pól wektorowych (VFO) zaprezentowano w [Mic04], gdzie uwzględniono praktyczne ograniczenia sygnałów sterujących i

uzyskano ograniczoną końcową błądów regulacji.

Odtwarzanie toru. Problem odtwarzania toru (ang. *path following*) nie wzbudził jak dotąd tak dużego zainteresowania badaczy jak problem śledzenia, choć jak się okazuje ma on bardzo duże znaczenie praktyczne. De Wit i Roskam [dWR91] zaproponowali algorytm pozwalający na odtwarzanie przez robota dwukołowego geometrycznych kształtów na płaszczyźnie (x, y) . Kształty te mogły składać się z odcinków prostoliniowych. Zamieszczone w pracy wyniki eksperymentalne prezentowały odtwarzanie figur prostokątnych i sześciokątnych przez punkt platformy ułożony poza osią kół robota. Samson [Sam92, dWKSS93] przedstawił metodę parametryzacji ścieżki krzywoliniowej jej długością s i zaproponował liniową i nieliniową wersję praw sterowania dla zadania odtwarzania zakładając jednocześnie stałą prędkość postępową wózka dwukołowego. Założenie takie uprościło procedurę projektowania prawa sterowania dla problemu odtwarzania. Ograniczeniem podejścia był postulat o wystarczająco małej odległości robota od zadanej ścieżki (w stosunku do jej maksymalnej krzywizny) tak, aby przedstawiona parametryzacja była możliwa i jednoznaczna. Realizacja ścieżek złożonych z fragmentów prostoliniowych i łuków okręgów była tematem pracy [SdW93]. Uzyskane prawo sterowania stanowiło rozszerzenie koncepcji nieciągłego stabilizatora stanu [dWS92] i gwarantowało wykładniczą zbieżność robota dwukołowego do zadanej ścieżki. W pracy [Sam95] zadanie odtwarzania było rozważane dla samochodu kinematycznego z dowolną liczbą przyczep z wykorzystaniem transformacji równań pojazdu do modelu łańcuchowego.

Stabilizacja w punkcie. Najtrudniejszym zadaniem sterowania dla układów nieholonomicznych jest problem stabilizacji w punkcie (ang. *point stabilization*). W przypadku mniejszej liczby sterowań w stosunku do liczby sterowanych zmiennych stanu, występowanie ograniczeń nieholonomicznych nie pozwala na spełnienie warunków koniecznych asymptotycznej stabilizacji ciągłym, statycznym i niezależnym od czasu sprzężeniem zwrotnym od stanu [Bro83]. Co więcej, statyczna linearyzacja modeli tych układów w otoczeniu stanu stabilizowanego prowadzi do systemu niesterowalnego, zatem techniki liniowe nie mają w tym przypadku zastosowania. Wszystkie dotychczas proponowane metody rozwiązania tego trudnego zadania można zaliczyć do dwóch podstawowych rodzin:

- metody nieciągłe,
- metody jawnie zależne od czasu⁷.

Rodzinę algorytmów nieciągłych niezależnych w sposób jawny od czasu dzieli się na dwie grupy [KM95]: sterowniki odcinkami ciągle oraz sterowniki ślizgowe. Przykładami drugiego podejścia są prace Blocha i współautorów (stabilizacja systemu Heisenberga [BD94, Blo03]) oraz wspomniana wcześniej praca [Chw04], w której za pomocą tej samej struktury sterownika rozwiązano także zadanie stabilizacji w punkcie (poza początkiem układu współrzędnych). Regulatory ślizgowe powodują jednak w praktyce niekorzystne zjawisko drgań sterowania i tym samym możliwość wzbudzania częstotliwości rezonansowych układu rzeczywistego, a także mogą skutkować względnie dużym kosztem ener-

⁷Istnieją także techniki hybrydowe łączące cechy obu wspomnianych metod [KM95, dWKSS93].

getycznym sterowań [Per02]. Metody stabilizacji ciągle odcinkami zaproponowało kilku autorów. De Wit i Sørдалen przedstawili podejście geometryczne, w którym robot dwukołowy wykładniczo zmierzał do punktu stabilizacji, a współrzędne robota transformowano do nowej przestrzeni związanej z rodziną okręgów przechodzących przez początek układu [dWS92, Sø93]. Bloch *et al.* w pracy [BRM92] przedstawił ogólny algorytm przełączanych, odcinkami analitycznych sterowań stosowalny do szerokiej klasy systemów w postaci modelu Caplygina (z uwzględnieniem poziomu dynamiki). Mukherjee *et al.* w [MCS99] zastosował nieliniowy oscylator tłumiony do zaprojektowania odcinkami gładkiego (lub *prawie gładkiego*) i niezależnego od czasu prawa sterowania dla systemu łańcuchowego stosując jednocześnie przejście do współrzędnych biegunowych. W pracy [YLB00] zastosowano dwa nieciągłe i proste podejścia motywowane geometrycznie uzyskując stabilizację praktyczną dynamiki wózka dwukołowego z założonym błędem końcowym. Aicardi *et al.* analizował kinematykę wózka dwukołowego i skorzystał z wyrażenia błędów stabilizacji we współrzędnych biegunowych [ACBB95]. Zaproponowane prawo sterowania wyrażone w tych współrzędnych miało charakter ciągły (nawet gładki), ale we współrzędnych kartezjańskich stawało się nieciągłe (osobliwe) w początku układu. Rozwinięcie i uogólnienie pomysłu przedstawił Astolfi, który wprowadził pojęcie σ -procesu [Ast96]. Proces ten polegał na niegładkiej transformacji modelu do innej przestrzeni pozwalając na projektowanie gładkich stabilizatorów dla układów nieholonomicznych wyrażonych w nowych współrzędnych. Powrót do przestrzeni przed transformacją wiązał się jednak z uchyleciem własności gładkości rozwiązania na rzecz stabilizatorów tylko odcinkami ciągłych⁸. Wprowadzone uogólnienie pozwoliło na zaproponowanie tzw. *prawie stabilizatorów*⁹ dla znacznie szerszej grupy systemów (między innymi dla systemów łańcuchowych), dając wykładniczą zbieżność błędów stabilizacji [Ast95a, Ast95b, Ast98]. Wydaje się, iż również algorytm zaproponowany przez Tsuchiya, Urakubo i Tsujita w pracy [TUT02] należy zaliczyć do rodziny *prawie stabilizatorów*. Wykładnicza zbieżność stanu do początku układu dla rozważanego tam robota jednokołowego wynikała z odpowiedniego nastrojenia parametrów regulatora. Struktura sterownika natomiast była rezultatem analizy stabilności metodą funkcji Lapunowa i wynikała z zastosowania dwóch składników sterowania: z tensorem symetrycznym i antysymetrycznym. Zadaniem tego ostatniego było wypychanie systemu z potencjalnych stabilnych punktów równowagi innych od punktu zadanego. Zaproponowana metodologia znajduje zastosowanie do klasy systemów nieholonomicznych pierwszego rzędu¹⁰ [Ura05].

Algorytmy odcinkami ciągle pozwalają na uzyskanie zbieżności wykładniczej i nie prowadzą do powstawania zjawiska drgań sterowania (systemy nie *utykają* w punktach nieciągłości, [KM95]). Jednak zgodnie z rozważaniami zawartymi w raporcie [LMS98], prawdopodobnie nie wykazują one także odporności na strukturalne zaburzenia pól wektorowych nominalnego modelu (1.1) w otoczeniu punktu stabilizacji. Wstępne wyniki analizy odporności odcinkami ciągłych praw sterowania zawarto w [Sø93, Ast96]. Ciekawym artykułem przeglądowym, w którym porównano i eksperymentalnie zweryfikowano kilka

⁸Brak ciągłości w sensie Lipschitza w otoczeniu punktu stabilizacji.

⁹Z ang. *almost stabilizers*.

¹⁰Są to systemy, których algebrę Liego dopełniają nawiasy Liego liczone tylko w oparciu o pola-generatory [MS93].

różnych praw stabilizacji (zarówno nieciągłych jak i jawnie zależnych od czasu) dla modelu robota jednokołowego jest praca [KT02]. Jako kryteria porównawcze wybrano tam takie wskaźniki, jak odporność na zakłócenia pomiarowe, jakość stanów przejściowych, szybkość odpowiedzi systemu oraz końcowe błędy stabilizacji.

Alternatywą dla grupy wyżej wspomnianych stabilizatorów nieciągłych są prawa sterowania jawnie zależne od czasu. Pierwsze propozycje gładkich stabilizatorów dla robota dwukołowego i trójkołowego podał Samson [Sam90, Sam91, Sam93]. Zastosował on w równaniach sterownika składniki sinusoidalne jako jawne funkcje zmiennej czasu τ pozwalające na ustawiczne pobudzanie sterowanego systemu aż do osiągnięcia stanu referencyjnego. W proponowanym podejściu składniki sinusoidalne stanowią odpowiedź nietłumionego oscylatora liniowego. Pomysł zastosowania bardziej uniwersalnych tłumionych oscylatorów nieliniowych do gładkiej asymptotycznej stabilizacji układów nieholonomicznych podali Mukherjee, Chen i Song [MCS99]. Ogólną metodologię projektowania gładkich sterowników dla klasy systemów bezdryfowych podał Pomet [Pom92]. Podstawową wadą gładkich stabilizatorów jest ich bardzo wolna zbieżność (ma charakter wielomianowy typu $\tau^{-1/a}$, $a \geq 1$) i duża oscylacyjność stanów przejściowych. Z praktycznego punktu widzenia zatem tego typu gładkie stabilizatory nie dają zadowalających wyników. Można jednak znaleźć w literaturze rozwiązania o lepszych własnościach zbieżności. Przykład różniczkowalnego stabilizatora jawnie zależnego od czasu dającego asymptotyczną zbieżność wykładniczą zaproponował Dixon *et al.* stosując technikę przestrajanego oscylatora kinematycznego [DJD00]. Próba poradzenia sobie z wolną zbieżnością gładkich sterowników było zrezygnowanie z własności ciągłości w sensie Lipschitza i zerowanie składnika jawnie zależnego od czasu w założonym otoczeniu stanu referencyjnego, uzyskując jednak w ten sposób tylko stabilność praktyczną [Sam95, dWKSS93]. Przykłady wspomnianych algorytmów i ich zastosowania można znaleźć także w pracach [MPS98, MS04, JLN01].

Innym rozwiązaniem problemu wolnej zbieżności było wprowadzenie niegładkich stabilizatorów homogenicznych [MM97, MM98], które gwarantują zbieżność κ -wykładniczą. Raport [LMS98] dowodzi jednak o braku odporności sterowników homogenicznych w otoczeniu stanu referencyjnego ze względu na pewne zakłócenia pól wektorowych modelu nominalnego (patrz także [MPS98]). Na skutek braku odporności zaburzony system zamiast osiągać stan zadany wpada zwykle w cykl graniczny w otoczeniu tego stanu [MS04]. Aby poprawić szybkość zbieżności algorytmów zależnych od czasu z zachowaniem ich odporności na wspomniane zaburzenia modelu nominalnego¹¹, zaproponowano tzw. sterowniki hybrydowe. Algorytm hybrydowy odporny na zaburzenia modelu przedstawili Morin i Samson w [MS99], gdzie prawo sterowania zależało od zmiennych stanu uaktualnianych tylko w dyskretnych chwilach czasu (patrz również [MS04]). Okazało się jednak, że zaproponowane rozwiązanie nie zachowuje odporności na inne rodzaje zakłóceń takie, jak zaburzenia okresu próbkowania dyskretnej części stabilizatora prowadząc ponownie do cykli granicznych wokół stanu referencyjnego. Zbieżność κ -wykładniczą dla systemów łańcuchowych przedstawiono w pracach [Sø93, SE95], gdzie stabilizator hybrydowy poza składnikami o charakterze ciągłym, posiadał dodatkowo niegładkie sprzężenie od stanu uaktualnianie w dyskretnych chwilach czasu. Inne przykłady stabilizatorów hybrydowych

¹¹Zgodnie z pracą [MS04], sterowniki gładkie są relatywnie niewrażliwe na szумы pomiarowe oraz mogą wykazywać odporność na błędy modelowania.

zawierają prace [dWKSS93] oraz [BR95, LO01]. Dwie ostatnie propozycje stanowią podejście uniwersalne gwarantujące odporność na zaburzenia modelu i zbieżność wykładniczą, w których dopuszcza się w ramach pojedynczej iteracji sterowania wykorzystanie zarówno technik planowania (iteracyjne planowanie ruchu) jak i technik wykorzystujących sprzężenie zwrotne.

Problemy z ciągłą stabilizacją systemów nieholonomicznych spowodowały pojawienie się nowych rozwiązań, które uchylają żądanie stabilizacji asymptotycznej na rzecz stabilizacji *praktycznej* z założonym z góry, dowolnie małym lecz niezerowym błędem końcowym. Zasadność takiego podejścia może potwierdzać zasadniczy wynik pracy [Liz03], w której dowiedziono, iż dla rozważanych systemów nie istnieje uniwersalny ciągły sterownik gwarantujący asymptotyczną stabilizację dowolnych referencyjnych trajektorii dopuszczalnych, w tym trajektorii zdegenerowanych do stałego punktu. Pierwsze próby zastosowania ciągłych i różniczkowalnych stabilizatorów *praktycznych* należą do Dixona i współautorów [DDZZ00, DDZB01], którzy do ustawicznego pobudzania systemu zastosowali pomocnicze sygnały tzw. tłumionego oscylatora o przestrajanej częstotliwości. Błąd regulacji w tym przypadku zdefiniowano jako różnicę między pomocniczym sygnałem oscylatora a odpowiedzią systemu. Bardziej ogólne rozwiązanie dedykowane dla szerszej klasy układów podali Morin i Samson wprowadzając pojęcie funkcji transwersalnych [MS01b, MS03]. Istnienie takich funkcji równoważne jest własności sterowalności danego systemu [MS01a]. Autorzy poszerzyli wektor sterowań o dodatkowe sygnały będące częstotliwościami wspomnianych funkcji, których wykorzystanie pozwalało na realizację ruchu we wszystkich kierunkach wynikających z algebry Liego sterowanego systemu. Obie wspomniane koncepcje (Dixona *et al.* i Morina *et al.*) wydają się koncepcyjnie bardzo podobne. Na dzień dzisiejszy wadą obu rozwiązań jest duża oscylacyjność stanów przejściowych i poważne problemy praktyczne związane z fizyczną realizowalnością wysokoczęstotliwościowych sygnałów sterujących, których realizacja jest gwarancją stabilności całego systemu. Pierwsze próby ograniczenia konieczności realizacji sterowań o dużych pulsacjach oraz próby poprawienia jakości stanów przejściowych sterownika Dixona przedstawiono w pracach [PK05, DGHC05]. Warto podkreślić, że oba rozwiązania pozwalają na realizację zarówno zadań śledzenia trajektorii jak i zadań stabilizacji w punkcie.

Podsumowując należy zauważyć, że kwestie dobrej jakościowo realizacji różnych zadań sterowania dla systemów nieholonomicznych pozostają nadal otwartym problemem badawczym. Szczególnie intensywnych analiz wymagają takie zagadnienia, jak uniwersalność proponowanych rozwiązań, szybkość zbieżności błędów regulacji w połączeniu z nieoscylacyjnymi stanami przejściowymi, odporność na różne rodzaje zakłóceń oraz uwzględnienie ograniczeń pasma i mocy stosowanych w praktyce układów wykonawczych. Przedstawiony powyżej krótki opis stosowanej metodologii sterowania dla układów nieholonomicznych nie wyczerpuje wszystkich propozycji zawartych w literaturze. Celem autora było zarysowanie aktualnego stanu wiedzy z zakresu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym dla układów nieholonomicznych oraz przywołanie ważniejszych prac i ich wyników. Bardziej szczegółowe informacje znajdują się w cytowanych wyżej pozycjach oraz zawartej w nich bibliografii. Dobry przegląd algorytmów sterowania dla różnych problemów regulacji można znaleźć w pozycjach [KM95, Blo03, dWSB96, MS04], a także w [dWKSS93, MS02, GHy02, TMD⁺00].

1.3 Zakres i wkład rozprawy

W prezentowanej pracy zaproponowano nową metodę projektowania odcinkami ciągłych sterowań ze sprzężeniem zwrotnym od stanu dedykowaną dla pewnej podklasy bezdryfowych systemów dynamicznych i nazwaną metodą orientowania pól wektorowych (w skrócie¹²: VFO). Metoda ta wynika z intuicyjnej interpretacji geometrycznej dotyczącej struktury modelu rozważanych systemów i ich potencjalnej ewolucji w czasie w odpowiedzi na sygnały wejściowe. Wprowadzona metodologia posłużyła do systematycznego wyprowadzenia nowych praw sterowania dla kilku wybranych systemów dynamicznych. Przedstawione zostanie rozwiązanie dwóch zadań sterowania:

- zadanie śledzenia trajektorii dopuszczalnych i pobudzających,
- zadanie stabilizacji w stałym punkcie referencyjnym.

Wykorzystanie sterowników VFO gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów regulacji $e(\tau)$ do zera dla obu powyższych zadań. Zastosowanie metody VFO zostanie w prezentowanej pracy ograniczone do podklasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych o dwóch sterowaniach:

$$\dot{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) u_2 = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (1.5)$$

gdzie $\mathbf{q} \triangleq [q_1 \dots q_n]^T \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 2$ stanowi wektor zmiennych stanu w przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{Q} , $\mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2]^T \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ jest wektorem sygnałów sterujących, a $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \ \mathbf{g}_2(\mathbf{q})] \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ jest macierzą kinematyki. Relacje wiążące w modelu (1.5) sygnały sterujące \mathbf{u} ze zmiennymi konfiguracyjnymi \mathbf{q} stanowią równania różniczkowe pierwszego rzędu¹³. Dodatkowo, spełnienie w każdej chwili równań modelu (1.5) determinuje zachowanie w każdej chwili niecałkowalnych skleronomicznych więzów kinematycznych (ograniczenia nieholonomiczne pierwszego rzędu) postaci:

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad \text{lub inaczej} \quad \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

gdzie $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ jest tzw. macierzą ograniczeń.

Prosta i intuicyjna interpretacja geometryczna związana z ogólną strukturą modelu (1.5) i jego potencjalną ewolucją w czasie pozwala na zaproponowanie jednolitej i spójnej metodologii projektowania praw sterowania dla różnych systemów z rozważanej klasy i różnych zadań sterowania. Wydaje się, iż wydzielenie takiej podklasy ze względu na poczynioną interpretację jest pomysłem nowym i daje nowe spojrzenie na grupę systemów, które jak się okaże posiadają pewne wspólne cechy związane ze sposobem ich ewolucji w czasie.

Proponowane podejście generalnie nie wymaga transformacji współrzędnych stanu systemu do jakiegokolwiek przestrzeni pomocniczej i w efekcie pozwala na uzyskanie wyników o charakterze globalnym, co jest istotne tak z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia. Wyprowadzone i zaproponowane równania sterowników charakteryzuje prostota struktury i możliwość prostej *fizycznej* interpretacji wszystkich występujących w

¹²Jest to skrót przyjęty na podstawie terminologii angielskiej od słów *Vector Field Orientation*.

¹³W przypadku układów mechanicznych równanie (1.5) definiuje kinematykę systemu, gdzie sygnały sterujące \mathbf{u} mają fizyczną interpretację prędkości.

niej składników. Obie cechy są bardzo pożądane w praktyce, gdyż gwarantują prostą i intuicyjną parametryczną syntezę sterowników niezależnie od warunków początkowych sterowanego systemu i rodzaju sygnałów referencyjnych.

Otrzymane prawa sterowania należy w ogólności zaliczyć do grupy nieciągłych¹⁴ sterowań klasy C^0 , gdzie zbiór punktów nieciągłości ma miarę zero.

Wyniki symulacyjne pokazują dobrą jakość dynamiczną sterowników VFO, przez co należy rozumieć szybką i nieoscylacyjną zbieżność błędów regulacji do zera zarówno dla zadania śledzenia jak i stabilizacji. Nieoscylacyjny charakter zbieżności implikuje także niski koszt energetyczny sterowania (w porównaniu do większości metod znanych z literatury przedmiotu) oraz *naturalny* ruch systemu w przestrzeni zadania. Te ostatnie cechy sterowników VFO mają szczególne znaczenie z punktu widzenia praktycznych zastosowań.

Metodologia VFO została zastosowana do kilku, znanych z literatury, przykładów systemów nieholonomicznych takich, jak: robot jednokołowy, manipulator z przekładniami nieholonomicznymi oraz abstrakcyjny model systemu łańcuchowego, przy czym wymiarowość stanu wszystkich systemów zostanie ograniczona do trzech. Dodatkowo podjęto próbę rozszerzenia stosowalności metody VFO na przykładzie liniowego systemu afinicznego trzeciego rzędu.

Sterowanie z orientowaniem pól wektorowych wydaje się stanowić pewne uogólnienie koncepcji sterowania we współrzędnych biegunowych zaproponowanej między innymi w pracach [ACBB95, Ast96]. Jest to także próba jednolitego podejścia do zagadnienia sterowania dla pewnej grupy systemów dynamicznych, włączając w to także systemy afiniczne z dryfem. Pierwsze próby połączenia za pomocą wspólnej metodologii projektowej systemów tak różnych jakościowo jak silnie nieliniowe układy bezdryfowe i liniowe systemy z dryfem dają, w mniemaniu autora, interesujące wyniki i wnioski dotyczące syntezy pewnych, dobrze już poznanych praw sterowania dla systemów holonomicznych.

Zgodnie z wiedzą autora, metoda orientowania pól wektorowych stanowi nowe, niepublikowane wcześniej w literaturze przedmiotu rozwiązanie problemów sterowania dla podklasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych. Wydaje się, że metodologia VFO może stanowić próbę unifikacji podejścia do zagadnień sterowania w obszarze nieliniowej teorii sterowania dla układów z ograniczeniami niecałkowalnymi. Prostota syntezy praw sterowania VFO gwarantująca dobrą jakość w stanach przejściowych niezależnie od warunków początkowych, może stanowić alternatywę dla trudnej i nierozwiązanej jak dotąd kwestii parametrycznej syntezy istniejących sterowników nieliniowych (dla rozważanej klasy systemów). Geometryczna interpretacja stanowiąca genezę powstania metody VFO pozwala na matematyczne sformalizowanie codziennego doświadczenia kierowców nieholonomicznych pojazdów kołowych wykonujących manewry parkowania oraz jazdy wzdłuż autostrady. W wyniku takiego podejścia i jego uogólnienia dla pewnej grupy układów, uzyskuje się prawa sterowania gwarantujące *naturalny* ruch sterowanych systemów w przestrzeni zadania niezależnie od warunków początkowych, rodzaju sygnałów referencyjnych oraz nastaw sterownika.

Koncepcję sterowania z orientowaniem pól wektorowych, metodologię projektowania praw sterowania VFO oraz przykłady jej wykorzystania prezentuje dalsza część niniejszej pracy, którą zorganizowano w następujący sposób. Część pierwsza dotyczy rozważań teore-

¹⁴Brak ciągłości w sensie Lipschitza.

tycznych. Rozdział 2 prezentuje istotę metody VFO wraz z jej interpretacją geometryczną, a także zawiera podstawowe definicje pojęć charakterystycznych dla nowej metody i używanych w dalszych rozważaniach. Rozdział 3 poświęcony jest zastosowaniom strategii VFO dla czterech przykładowych systemów dynamicznych o trójwymiarowych wektorach stanu. Każdy przykład składa się z formalnej analizy dotyczącej wykorzystania nowej metodologii projektowej oraz z weryfikacji symulacyjnej wyprowadzonych sterowników. Na końcu rozdziału zawarto uogólnienia i komentarze nasuwające się po analizie przytoczonych przykładów. Klasyfikację proponowanej metody sterowania oraz jej jakościowe porównanie z wybranymi z literatury algorytmami sterowania zawiera rozdział 4. Podsumowanie i wyszczególnienie dalszych kierunków badań zawiera rozdział 5, który kończy część teoretyczną pracy. Część druga niniejszej rozprawy zawiera wyniki badań eksperymentalnych nowych sterowników VFO, przeprowadzonych z wykorzystaniem nowej modułowej kołowej platformy mobilnej MMS zaprojektowanej i wykonanej w Katedrze Sterowania i Inżynierii Systemów Politechniki Poznańskiej.

Metodologia VFO

W rozdziale tym w sposób ogólny przedstawiona zostanie koncepcja sterowania z orientowaniem pól wektorowych z wyszczególnieniem klasy systemów, której ona dotyczy. Poczynione rozważania będą miały na celu wprowadzenie w nową metodologię projektowania sterowania oraz wyjaśnienie proponowanego podejścia. Szczegółowa analiza metody VFO zostanie poczyniona w następnym rozdziale w odniesieniu do konkretnych przykładów jej zastosowania.

2.1 Interpretacja geometryczna

Rozważmy podklasę Σ bezdryfowych systemów nieholonomicznych (1.5)-(1.6) z dwoma sterowaniami postaci:

$$\Sigma : \quad \dot{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{g}_1 u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) u_2 = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

gdzie

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ \mathbf{q}^* \end{bmatrix} \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad n > 2, \quad \mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

a pola-generatory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ mają następującą formę:

$$\mathbf{g}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Składowe $g_i(\mathbf{q})$, $i = 2, \dots, n$ oznaczają pewne funkcje zmiennych stanu. Powyższa postać generatorów jest charakterystyczna dla wielu modeli systemów nieholonomicznych o dużym znaczeniu praktycznym. Dla innych systemów natomiast może ona zostać uzyskana poprzez zwykłą zamianę kolejności współrzędnych w wektorze stanu \mathbf{q} lub poprzez lokalną dyfeomorficzną transformację zmiennych stanu (twierdzenie o prostowaniu [TMD⁺00]). W przypadku konieczności zastosowania transformacji lokalnej, wszystkie rozważania pozostają słuszne tylko lokalnie dla $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$.

Metoda VFO wynika z prostej geometrycznej interpretacji związanej z powyższą postacią modelu systemu bezdryfowego oraz z potencjalną ewolucją tego systemu w odpowiedzi na specyficzne sygnały wejściowe \mathbf{u} . Przeanalizujemy teraz strukturę systemu (2.1)-(2.2).

Z założenia (2.2), pierwsze pole podstawowe \mathbf{g}_1 (tzw. generator) jest polem stałym, skierowanym wzdłuż współrzędnej q_1 przestrzeni stycznej $\mathcal{TQ} \subset \mathbb{R}^n$. Zatem pierwsze równanie w (2.1) ma postać liniowego równania różniczkowego definiującego jednowymiarowy podsystem dynamiczny Σ^1 :

$$\Sigma^1 : \quad \dot{q}_1 = u_1. \quad (2.3)$$

Drugie pole podstawowe $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = [0 \ \mathbf{g}_2^{*T}(\mathbf{q})]^T$ jest funkcją zmiennych konfiguracyjnych \mathbf{q} . Współrzędne $g_i(\mathbf{q})$ pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ determinują bieżący kierunek generatora $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ w podprzestrzeni stycznej $\mathcal{TQ}^* \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Zatem zmiana wartości zmiennych konfiguracyjnych \mathbf{q} pozwala na zmianę współrzędnych $g_i(\mathbf{q})$, a tym samym na zmianę kierunku pola $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ w \mathbb{R}^{n-1} . Warto zauważyć, że oba pola wektorowe zdefiniowane w (2.2) są zawsze ortogonalne względem siebie ($\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \equiv 0$), a także są zawarte w płaszczyznach ortogonalnych do siebie w \mathbb{R}^n .

Zapiszmy pozostałe $n-1$ równań różniczkowych modelu Σ (równanie (2.1)) jako $n-1$ wymiarowy podsystem dynamiczny Σ^* postaci:

$$\Sigma^* : \quad \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) u_2, \quad (2.4)$$

gdzie $\dot{\mathbf{q}}^* \triangleq [\dot{q}_2 \dots \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$. Z postaci podsystemu Σ^* wynika, że kierunek pola prędkości $\dot{\mathbf{q}}^*$ jest równoważny kierunkowi pola \mathbf{g}_2^* , co można zapisać jako:

$$Dir\{\dot{\mathbf{q}}^*\} \equiv Dir\{\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})\}. \quad (2.5)$$

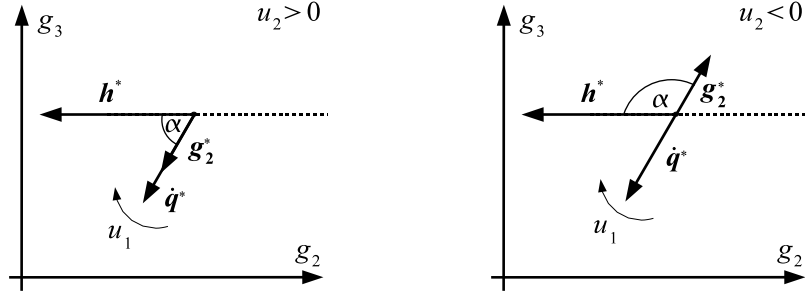
Znak sygnału u_2 określa dodatkowo zwrot pola prędkości $\dot{\mathbf{q}}^*$ wzdłuż kierunku \mathbf{g}_2^* . Można zatem powiedzieć, że orientacje pól $\dot{\mathbf{q}}^*$ i \mathbf{g}_2^* są zgodne, gdy $u_2 > 0$, a przeciwnie, gdy $u_2 < 0$ przy zachowaniu wspólnego kierunku. Gdybyśmy teraz założyli, że przynajmniej część współrzędnych $g_i(\mathbf{q})$ pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ zależy bezpośrednio od pierwszej zmiennej konfiguracyjnej q_1 :

$$\exists_{i=2, \dots, n} \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_1} \neq 0, \quad (2.6)$$

a reszta z nich zależy od zmiennej q_1 w sposób pośredni (np. poprzez relację całkową wynikającą z równań modelu), to wykorzystując równanie (2.3) moglibyśmy za pomocą odpowiednio skonstruowanego sterowania u_1 w założony sposób wpływać na chwilowy kierunek i orientację generatora $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ w \mathbb{R}^{n-1} . Proces zmiany orientacji nazwiemy *orientowaniem* pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ (lub równoważnie pola $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ ze względu na zerową pierwszą współrzędną: $q_1 \equiv 0$). Zmienne konfiguracyjne, od których zależą funkcje g_i i które tym samym mają wpływ na bieżącą orientację generatora \mathbf{g}_2^* nazwiemy *zmiennymi orientującymi*. Zatem z założenia (2.6) q_1 jest zmienną orientującą. Ze względu na równanie (2.3) oraz powyższą interpretację, sterowanie u_1 możemy określić mianem *sterowania orientującego*. Sterowanie to bowiem wpływa bezpośrednio na wartość zmiennej orientującej q_1 , a tym samym na chwilową orientację pola \mathbf{g}_2^* .

Przyjrzyjmy się teraz podsystemowi Σ^* z równania (2.4), zgodnie z którym ewolucja wektora $\mathbf{q}^* \triangleq [q_2 \dots q_n]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ zachodzi zawsze proporcjonalnie do wartości sterowania u_2 wzdłuż aktualnego kierunku pola \mathbf{g}_2^* . Znak sygnału u_2 określa zwrot pola prędkości

$\dot{\mathbf{q}}^*$, czyli strategię ewolucji typu: *ruch do przodu* lub *ruch do tyłu* na kierunku \mathbf{g}_2^* . Stosując ponownie interpretację geometryczną możemy powiedzieć, że sterowanie u_2 *popycha* podsystem (2.4) (lub inaczej podwektor stanu \mathbf{q}^*) wzdłuż bieżącego kierunku pola \mathbf{g}_2^* . Takie sterowanie nazwiemy zatem *sterowaniem popychającym*. Przykładową ilustrację powyższej interpretacji w przestrzeni \mathbb{R}^2 dla obu strategii ewolucji prezentuje rys. 2.1.



Rys. 2.1: Zależności geometryczne między polami $\dot{\mathbf{q}}^*$, \mathbf{g}_2^* oraz \mathbf{h}^* w przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Założmy teraz, że zadaniem sterowania jest zapewnienie zbieżności aktualnego stanu $\mathbf{q} = [q_1 \ \mathbf{q}^{*T}]^T$ systemu (2.1) do pewnego stanu referencyjnego $\mathbf{q}_t = [q_{1t} \ \mathbf{q}_t^{*T}]^T$. Zdekomponujmy to zadanie na dwa podzadania: 1) zbieżność $\mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{q}_t^*$ oraz 2) zbieżność $q_1 \rightarrow q_{1t}$. Wprowadźmy także pojęcie pola wektorowego zbieżności w \mathbb{R}^{n-1} i oznaczmy je przez $\mathbf{h}^* = \mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot)$. Wektor $\mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot)$ z założenia definiuje w każdym punkcie \mathbf{q}^* chwilowy kierunek zbieżności do stanu referencyjnego \mathbf{q}_t^* . Zgodnie z przeprowadzoną wcześniej interpretacją, realizacja pierwszego podzadania wymaga zmiany kierunku pola \mathbf{g}_2^* (za pomocą sterowania u_1) tak, aby nałożyć je (przynajmniej w granicy dla $\tau \rightarrow \infty$) na kierunek zbieżności definiowany polem \mathbf{h}^* . Wprowadzając pojęcie skierowanego kąta orientacji $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*, \mathbf{h}^*) \in (-\pi, \pi]$ oraz kosinusa tego kąta (por. rys. 2.1):

$$\cos \alpha \triangleq \frac{\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{h}^*}{\|\mathbf{g}_2^*\| \|\mathbf{h}^*\|}$$

możemy stwierdzić, iż nałożenie kierunku \mathbf{g}_2^* na kierunek pola zbieżności \mathbf{h}^* równoważne jest spełnieniu relacji: $\cos \alpha \rightarrow \pm 1$. Uzgodnienie kierunków pól \mathbf{g}_2^* i \mathbf{h}^* (a tym samym $\dot{\mathbf{q}}^*$ i \mathbf{h}^* zgodnie z (2.5)) pozwala w konsekwencji na proste *popchnięcie* stanu \mathbf{q}^* za pomocą sterowania u_2 wzdłuż kierunku zbieżności do stanu referencyjnego \mathbf{q}_t^* . Oczywiście, aby system zmierzał do stanu referencyjnego (a nie oddalał się od niego) nie tylko kierunki, ale i zwroty pól $\dot{\mathbf{q}}^*$ oraz \mathbf{h}^* muszą być zgodne (patrz rys. 2.1). Uzgodnienie kierunków i zwrotów $\dot{\mathbf{q}}^*$ oraz \mathbf{h}^* jest tożsame z uzgodnieniem *orientacji* tych pól.

Jak dotąd, według powyższej strategii, zmienna orientująca q_1 spełnia rolę pomocniczą – bierze bezpośredni udział w procesie orientowania. Generalnie zatem nie ma gwarancji, że realizacja podzadania 1) zapewnia jednocześnie zbieżność q_1 do q_{1t} . Co więcej, w stanach przejściowych zmienna orientująca q_1 może chwilowo oddalać się od wartości referencyjnej q_{1t} tak, aby zapewnić efektywność procesu orientowania. Realizacja podzadania 2) musi

zatem wynikać z konstrukcji pełnego wektora zbieżności

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \\ h_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \\ \vdots \\ h_n(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \\ \mathbf{h}^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.7)$$

którego postać winna zapewniać spełnienie następującej relacji:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) : \lim_{\mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{q}_t^*} q_1(u_1(\mathbf{q}^*, \mathbf{q}_t^*)) \rightarrow q_{1t}. \quad (2.8)$$

Konstruowanie pola $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot)$ nie jest zadaniem jednoznacznym i daje swobodę w kształtowaniu stanów przejściowych sterowanego systemu. W pracy zaproponowane zostaną dwie ogólne postaci pola \mathbf{h} różne dla zadań śledzenia i stabilizacji, wynikające jednak ze wspólnej koncepcji projektowej. Koncepcja ta zakłada, iż elementy wektora zbieżności stanowią liniową kombinację błędu regulacji ε i sygnału wyprzedzającego v dla danej zmiennej stanu:

$$h_i \triangleq k_i \varepsilon_i + v_i, \quad k_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

gdzie elementy ε_i oraz v_i wynikają z konkretnej postaci modelu rozważanego systemu.

Wspomniane wcześniej procesy orientowania i popychania nie muszą być realizowane sekwencyjnie. W dalszej części pracy zaproponowane zostanie ciągle sterowanie, w którym oba procesy zachodzą jednocześnie. Realizacja procesu popychania przy niepełnej zgodności kierunków pól \mathbf{g}_2^* i \mathbf{h}^* jest uzasadniona, albowiem do zapewnienia chwilowej zbieżności stanu \mathbf{q}^* wystarcza, aby kąt orientacji $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*, \mathbf{h}^*) \neq \pm\pi/2$ [TMD⁺00, SR03]. Rozsądnym wydaje się jednak, aby *intensywność* procesu popychania (czyli wartość normy $\|\dot{\mathbf{q}}^*\|$) ograniczyć w takim przypadku do chwilowego ortogonalnego rzutu pola zbieżności \mathbf{h}^* na bieżący kierunek \mathbf{g}_2^* . Można mówić w takiej sytuacji o zasadzie *popychania ostrożnego*, z której wynika, iż maksymalna intensywność popychania jest dozwolona tylko w sytuacji całkowitej zgodności kierunków \mathbf{h}^* i \mathbf{g}_2^* .

Zgodnie z powyższym rozumowaniem, strategię VFO dla systemu (2.1)-(2.2) można zwięźle zapisać za pomocą następujących relacji:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) : \lim_{\mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{q}_t^*} q_1(u_1(\mathbf{q}^*, \mathbf{q}_t^*)) \rightarrow q_{1t} \quad (2.10)$$

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}(\tau)) \|\mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot)\| \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}(\tau)) k(\tau) = \mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot) \quad (2.11)$$

$$u_2 : \|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\| \propto \|\mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot)\| \cos \alpha, \quad \alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*, \mathbf{h}^*) \quad (2.12)$$

gdzie $k(\tau)$ jest pewną funkcją skalarną (różną od zera). Relacja (2.11) pozwala na wyprowadzenie tzw. *warunków orientowania*, czyli warunków gwarantujących nałożenie kierunku pola \mathbf{g}_2^* na kierunek pola zbieżności \mathbf{h}^* .

Zgodnie z (2.5), relację (2.11) można alternatywnie zastąpić w następujący sposób:

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}^*(\tau) \uparrow \uparrow \mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot) \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}^*(\tau) k'(\tau) = \mathbf{h}^*, \quad (2.13)$$

przy czym skalarna funkcja $k'(\tau)$ musi być w tym przypadku nieujemna, co wynika z konieczności uzgodnienia także zwrotów obu pól $\dot{\mathbf{q}}^*$ i \mathbf{h}^* . Zapewnienie zgodności kierunków i zwrotów $\dot{\mathbf{q}}^*$ i \mathbf{h}^* wynika w tym przypadku ze współpracy obu sterowań u_1 oraz u_2 .

W kolejnym rozdziale, uzyskane na podstawie (2.11) lub (2.13) warunki orientowania będą bezpośrednio wykorzystywane do konstruowania sterowania orientującego u_1 dla kilku wybranych systemów dynamicznych.

Projektowanie sterowników VFO wymaga wprowadzenia pewnych zmiennych pomocniczych oraz błędów pomocniczych wykorzystywanych podczas realizacji procesu orientowania. Postaci zmiennych pomocniczych wynikają z warunków orientowania uzyskiwanych bezpośrednio z relacji (2.11) (lub z (2.13)). Szczegóły projektowe zostaną przedstawione w następnym rozdziale w oparciu o konkretne przykłady zastosowania metodologii VFO.

Podsumowując powyższe rozważania, metodologia sterowania z orientowaniem pól wektorowych (VFO) polega na dekompozycji modelu Σ na dwa podsystemy Σ^1 i Σ^* ($\Sigma = \Sigma^1 \oplus \Sigma^*$) oraz w konsekwencji na dekompozycji zadania sterowania na procesy orientowania i popychania. Dekompozycja ta wynika z prostej geometrycznej interpretacji postaci modelu (2.1)-(2.2) i jego potencjalnej ewolucji w odpowiedzi na specyficzne sygnały wejściowe: sterowanie orientujące u_1 i sterowanie popychające u_2 . Podobną terminologię sygnałów wynikającą z interpretacji geometrycznej zastosowano w pracy [BRM92]. Istotnym elementem przedstawionej ogólnej strategii jest zastosowanie pola zbieżności \mathbf{h} , którego konstrukcja zapewnia spełnienie relacji (2.8). Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, iż klasyczne strategie sterowania definiują kierunek zbieżności jako $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot) \triangleq \mathbf{e} \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q}$ przy próbie jednoczesnego wymuszenia ruchu sterowanego systemu wzdłuż wszystkich składowych pola $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Stosowanie tego podejścia do sterowania układami nieholonomicznymi jest próbą przeniesienia metodologii znanej z teorii sterowania dla układów holonomicznych. Jednak w przypadku systemów z nałożonymi niecałkowalnymi więzami prędkościowymi, taka strategia generalnie wiąże się z dużą oscylacyjnością stanów przejściowych oraz względnie wysokim kosztem energetycznym sygnałów sterujących. Przyczyną takiego stanu rzeczy w tym przypadku jest konieczność realizacji efektywnej ewolucji systemu także wzdłuż kierunków zabronionych definiowanych nawiasami Liego pól-generatorów. W konsekwencji, ruch systemu jest nacechowany dużą ilością nawrotów w stanach przejściowych. Rozwiązanie proponowane w niniejszej pracy stanowi pewną alternatywę w stosunku do większości istniejących metod sterowania, pozwalającą na poprawę jakości procesów dynamicznych i jednocześnie wydaje się być próbą uogólnienia koncepcji sterowania we współrzędnych biegunowych [ACBB95, Ast96].

2.2 Terminologia

Aby uściślić przedstawioną w poprzednim paragrafie terminologię, wprowadzimy na użytek niniejszej pracy kilka istotnych definicji. Pozwolą one na jednoznaczny analizę konkretnych przykładów systemów podklasy Σ z punktu widzenia stosowalności metody orientowania pól wektorowych. W oparciu o zdefiniowane pojęcia, zaproponowany zostanie nowy podział trajektorii referencyjnych uwzględniający poczynione wyżej interpretacje geometryczne.

Wprowadźmy na początku następujące oznaczenia, do których odnoszą się poniższe definicje:

- $\mathbf{u}_t \triangleq [u_{1t} \ u_{2t}]^T$ – sterowanie referencyjne,

- \mathcal{U}_t – zbiór sterowań referencyjnych: $u_{it} \in \mathcal{U}_t$, $i = 1, 2$,
- q_j – j -ta składowa wektora $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$,
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ – niezerowe, ograniczone pole wektorowe jako funkcja wektora $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$,
- $\mathbf{z}(\cdot) \triangleq [z_1(\cdot) \dots z_n(\cdot)]^T \in \mathbb{R}^n$ – niezerowe, ograniczone, ustalone lub zmienne pole wektorowe odniesienia w \mathbb{R}^n .

2.2.1 Podstawowe definicje

Definicja 2.7 (Kierunek pola w \mathbb{R}^n) Kierunkiem pola wektorowego $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ w przestrzeni \mathbb{R}^n określonym względem pewnego wybranego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy kąt $\beta \triangleq \angle(\mathbf{g}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\cdot)) \in [0, \pi)$ określony jako

$$\beta \triangleq \arccos \left\{ \frac{\mathbf{g}^T(\mathbf{q})\mathbf{z}(\cdot)}{\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \|\mathbf{z}(\cdot)\|} \right\}. \quad (2.14)$$

◇

Definicja 2.8 (Pole kierowalne) Polem kierowalnym nazywamy takie pole wektorowe $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$, którego bieżący kierunek β względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ zależy od bieżących wartości zmiennych \mathbf{q} :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \beta = \beta(\mathbf{q}, \cdot). \quad (2.15)$$

◇

Definicja 2.9 (Osiągalność kierunku w \mathbb{R}^n) Kierunek $\bar{\beta} \in [0, \pi)$ określony względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy osiągalnym przez pole $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ w przestrzeni \mathbb{R}^n , jeżeli istnieje regularny punkt $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ taki, że:

$$\angle(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z}(\cdot)) = \bar{\beta}. \quad (2.16)$$

◇

Definicja 2.10 (Pole w pełni kierowalne w \mathbb{R}^n) Pole $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy w pełni kierowalnym w przestrzeni \mathbb{R}^n względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, jeżeli:

$$\forall_{\bar{\beta} \in [0, \pi)} \exists_{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n} : \angle(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z}(\cdot)) = \bar{\beta}, \quad (2.17)$$

gdzie $\bar{\mathbf{q}}$ jest regularnym punktem pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

◇

Definicja 2.11 (Kierowanie pola) Kierowaniem pola $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy proces zmiany kierunku $\beta(\mathbf{q}, \cdot)$ tego pola względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot)$ w wyniku zmiany punktu \mathbf{q} pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ w \mathbb{R}^n .

◇

Definicja 2.12 (Orientacja pola w \mathbb{R}^n) Orientacją pola wektorowego $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ w przestrzeni \mathbb{R}^n określoną względem pewnego wybranego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy kąt skierowany $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\cdot)) \in (-\pi, \pi]$, którego kosinus określa się jako

$$\cos \alpha \triangleq \frac{\mathbf{g}^T(\mathbf{q})\mathbf{z}(\cdot)}{\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \|\mathbf{z}(\cdot)\|}. \quad (2.18)$$

◇

Powyższa definicja nie zakłada obliczania wartości kąta α na podstawie (2.18), ponieważ wynik takiego obliczenia byłby w przypadku orientacji (kąta skierowanego) niejednoznaczny. Orientacja pola wektorowego w odróżnieniu od kierunku tego pola uwzględnia zatem także zwrot pola wzdłuż linii kierunku na którym ono działa. Zgodnie z (2.18) dla kolinearnych pól $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ i $\mathbf{z}(\cdot)$ o zgodnych zwrotach $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = +1$, a dla pól o zwrotach przeciwnych $\alpha = \pi \Rightarrow \cos \alpha = -1$.

Definicja 2.13 (Pole orientowalne) Polem orientowalnym nazywamy takie pole wektorowe $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$, którego bieżąca orientacja α względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ zależy od bieżących wartości zmiennych \mathbf{q} :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha(\mathbf{q}, \cdot). \quad (2.19)$$

◇

Definicja 2.14 (Osiągalność orientacji w \mathbb{R}^n) Orientację $\bar{\alpha} \in (-\pi, \pi]$ określoną względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy osiągalną przez pole $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ w przestrzeni \mathbb{R}^n , jeżeli istnieje regularny punkt $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ taki, że:

$$\angle(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z}(\cdot)) = \bar{\alpha}. \quad (2.20)$$

◇

Definicja 2.15 (Pole w pełni orientowalne w \mathbb{R}^n) Pole $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy w pełni orientowalnym w przestrzeni \mathbb{R}^n względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, jeżeli:

$$\forall \bar{\alpha} \in (-\pi, \pi] \quad \exists \bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n : \quad \angle(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z}(\cdot)) = \bar{\alpha}, \quad (2.21)$$

gdzie $\bar{\mathbf{q}}$ jest regularnym punktem pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

◇

Definicja 2.16 (Orientowanie pola) Orientowaniem pola $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy proces zmiany orientacji $\alpha(\mathbf{q}, \cdot)$ tego pola względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot)$ w wyniku zmiany punktu \mathbf{q} pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ w \mathbb{R}^n .

◇

Zgodnie z modelem (2.1)-(2.2), zmiana punktu $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ pola $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ wynika bezpośrednio z oddziaływania sygnałów sterujących \mathbf{u} i może zostać przeprowadzona w sposób ciągły, gdy system (2.1) jest sterowalny. Celowe orientowanie generatora $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ w modelu (2.1) jest możliwe poprzez odpowiednio skonstruowane sterowanie $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$.

Definicja 2.17 (Zmienna orientująca) Dana jest orientacja $\alpha(\mathbf{q}, \cdot)$ pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ względem pewnego pola odniesienia $\mathbf{z}(\cdot)$. Każdą składową q_j , $j = 1, \dots, n$ wektora $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ (definiującego punkt pola $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$), która spełnia relację:

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{q}, \cdot)}{\partial q_j} \neq 0 \quad (2.22)$$

nazywamy zmienną orientującą (precyzyjnie: zmienną orientującą pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$). Innymi słowy, każdą zmienną q_j , która ma wpływ na zmianę orientacji $\alpha(\mathbf{q}, \cdot)$ pola $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ nazywamy zmienną orientującą. Wprowadzając pojęcie zbioru zmiennych orientujących \mathcal{Q}_o możemy zapisać: $q_j \in \mathcal{Q}_o \Leftrightarrow$ zachodzi (2.22).

◇

Zakładając spełnienie warunku (2.6) oraz uwzględniając (2.18), zmienna konfiguracyjna q_1 jest zmienną orientującą dla systemów z rodziny Σ .

Definicja 2.18 (Sterowanie orientujące) Sterowaniem orientującym nazywamy takie sterowanie $u_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2$, które w modelu (2.1)-(2.2) spełnia przynajmniej jedno równanie różniczkowe postaci:

$$\dot{q}_j = g(\mathbf{q})u_i, \quad \text{gdzie } q_j \in \mathcal{Q}_o, \quad (2.23)$$

a $g(\mathbf{q})$ oznacza pewną niezerową funkcję zmiennych stanu $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Wprowadzając pojęcie zbioru sterowań orientujących \mathcal{U}_o możemy zapisać: $u_i \in \mathcal{U}_o \Leftrightarrow \exists q_j : \text{zachodzi (2.23)}$.

◇

Zakładając, że $q_1 \in \mathcal{Q}_o$, zgodnie z modelem (2.1)-(2.2) sterowanie $u_1 \in \mathcal{U}_o$.

Definicja 2.19 (Zmienna orientująca sterowana bezpośrednio) Każdą zmienną orientującą $q_j \in \mathcal{Q}_o$, $j = 1, \dots, n$ spełniającą w modelu (2.1)-(2.2) równanie (2.23), w którym $g(\mathbf{q}) \equiv 1$ nazywamy zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio.

◇

Z postaci modelu (2.1)-(2.2) wynika, że gdy $q_1 \in \mathcal{Q}_o$, to jest q_1 jest zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio.

Definicja 2.20 (Sterowanie popychające) Sterowaniem popychającym nazywamy takie sterowanie $u_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2$, które w modelu (2.1)-(2.2) spełnia przynajmniej jedno równanie różniczkowe postaci:

$$\dot{q}_j = g(\mathbf{q})u_i, \quad \text{gdzie } q_j \notin \mathcal{Q}_o, \quad (2.24)$$

a $g(\mathbf{q})$ oznacza pewną niezerową funkcję zmiennych stanu $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Innymi słowy, sterowaniem popychającym jest takie sterowanie $u_i \in \mathcal{U}$, które poprzez równanie (2.24) wpływa na ewolucję przynajmniej jednej zmiennej q_j nie będącej zmienną orientującą. Wprowadzając pojęcie zbioru sterowań popychających \mathcal{U}_p możemy zapisać: $u_i \in \mathcal{U}_p \Leftrightarrow \exists q_j : \text{zachodzi (2.24)}$.

◇

Definicja 2.21 (Sterowanie orientująco-popychające) Sterowaniem orientująco-popychającym w modelu (2.1) nazywamy takie sterowanie $u_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2$, które jest zarówno sterowaniem orientującym jak i popychającym, czyli spełnia następujące relacje:

$$u_i \in \mathcal{U}_o \wedge u_i \in \mathcal{U}_p \Rightarrow u_i \in (\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_p).$$

◇

Definicja 2.22 (Całkowita dekomponowalność) System (2.1)-(2.2) nazywamy całkowicie dekomponowalnym na podsystem wyłącznie orientujący i podsystem wyłącznie popychany, jeżeli spełnione są następujące relacje:

$$\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_p = \emptyset, \quad \text{oraz} \quad \mathcal{U}_o \neq \emptyset, \quad \mathcal{U}_p \neq \emptyset, \quad (2.25)$$

co oznacza, że w systemie (2.1) występuje jedno sterowanie orientujące i jedno sterowanie popychające.

Wprowadzone wyżej definicje implikują spełnienie następujących relacji:

R1. $\cos \beta \equiv \cos \alpha$,

R2. pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ jest orientowalne \Leftrightarrow pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ jest kierowalne,

R3. orientacja $\bar{\alpha} = \angle(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z})$ jest osiągalna \Rightarrow kierunek $\bar{\beta} = \angle(\mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z})$ jest osiągalny,

R4. pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ jest w pełni orientowalne \Rightarrow pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ jest w pełni kierowalne,

R5. pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ nie jest w pełni kierowalne \Rightarrow pole $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ nie jest w pełni orientowalne.

Z powyższych relacji wynika, że własność pełnej kierowalności jest słabsza od własności pełnej orientowalności, a zbiór $\bigcup_j \bar{\alpha}_j$ wszystkich osiągalnych orientacji zawiera w sobie zbiór $\bigcup_j \bar{\beta}_j$ wszystkich osiągalnych kierunków: $\bigcup_j \bar{\beta}_j \subseteq \bigcup_j \bar{\alpha}_j$. Implikacje odwrotne do **R3**, **R4** i **R5** generalnie nie muszą zachodzić. Analizę cech systemu rodziny Σ z punktu widzenia wykorzystania metodologii VFO ilustruje następujący przykład.

Przykład 1 Rozważmy abstrakcyjny bezdryfowy system dynamiczny 3-D należący do rozważanej podklasy Σ :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 + 1 \\ q_2^2 - q_1 \end{bmatrix} u_2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = u_1 \\ \dot{q}_2 = (q_1 + 1) u_2 \\ \dot{q}_3 = (q_2^2 - q_1) u_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

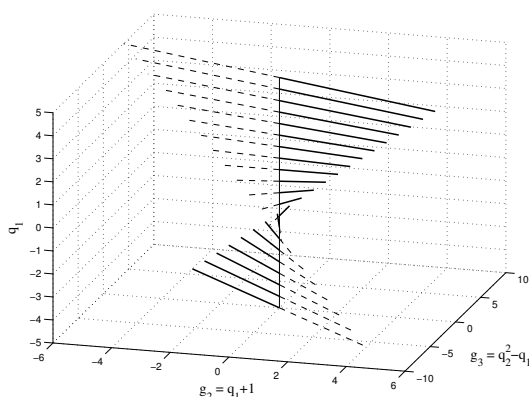
Można pokazać, że system (2.26) jest w pełni sterowalny dla każdego $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{C} \triangleq [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \quad \mathbf{g}_3], \quad \det(\mathbf{C}) = -(1 + q_2^2) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{C}) = 3 = n,$$

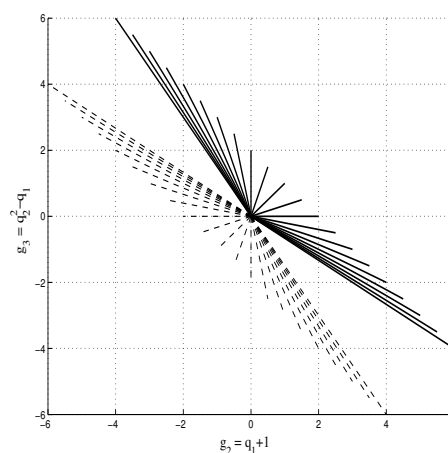
gdzie $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ jest macierzą sterowalności, $\mathbf{g}_3 \triangleq [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2(\mathbf{q})] = [0 \quad 1 \quad -1]^T$ oraz $n \triangleq \dim(\mathbf{q})$. Zgodnie z modelem (2.26) możemy zapisać: $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \quad \mathbf{g}_3(\mathbf{q})]^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = q_1 + 1$, $\mathbf{g}_3(\mathbf{q}) = q_2^2 - q_1$ oraz:

$$\cos \alpha \stackrel{(2.18)}{=} \frac{q_1(z_1 - z_2) + z_1 + z_2 q_2^2}{\sqrt{(q_1 + 1)^2 + (q_2^2 - q_1)^2} \sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \Rightarrow \alpha = \alpha(q_1, q_2) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial q_{1,2}} \neq 0,$$

gdzie $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ jest pewnym (tu ustalonym) niezerowym polem odniesienia. Zgodnie z powyższą implikacją i definicją 2.17: $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_o$, a $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest polem orientowalnym (def. 2.13). Z dwóch ostatnich równań w (2.26) wynika, że $\partial g_{2,3}/\partial q_1 \neq 0$ i spełniona jest relacja (2.6). Z postaci pierwszego równania w (2.26) wynika, że $u_1 \in \mathcal{U}_o$, a q_1 jest zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio. Z definicji 2.18 i drugiego równania w (2.26) wynika, że również $u_2 \in \mathcal{U}_o$. Trzecie równanie w (2.26) implikuje: $u_2 \in \mathcal{U}_p$, gdyż $q_3 \notin \mathcal{Q}_o$. Zatem $u_2 \in (\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_p)$ i jest sterowaniem orientująco-popychającym (def. 2.21). Z tego względu i w oparciu o definicję 2.22, system (2.26) nie jest w pełni dekomponowalny. Z postaci pola $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ wynika: $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \ \|\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})\| \neq 0$, zatem orientacja α jest dobrze określona w każdym punkcie przestrzeni konfiguracyjnej $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$. Prosta analiza postaci składowych g_2, g_3 pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ wskazuje, iż pole to nie jest w pełni kierowalne. Wystarczy zauważyć, że aby osiągnąć kierunki $\beta = -45^\circ$ lub $\beta = 135^\circ$ (liczone względem pola odniesienia $\mathbf{z} = [1 \ 0]^T$) musiałoby zachodzić $g_2 = -g_3$, co dla (2.26) daje równanie sprzeczne: $q_1 + 1 = -q_2^2 + q_1$ dla dowolnych $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$. Zgodnie z relacją **R5** pole $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ nie jest także w pełni orientowalne. Brak własności pełnej orientowalności można także wywnioskować zauważając, że dla dowolnych $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, składowe g_2, g_3 nie mogą być jednocześnie ujemne. Zatem orientacje należące do trzeciej ćwiartki układu $\{g_2, g_3\}$ nie są osiągalne. Kierunki i orientacje osiągalne w \mathbb{R}^2 dla pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) = [q_1 + 1 \ q_2^2 - q_1]^T$ zostały przedstawione na rysunkach 2.2 oraz 2.3, gdzie zbiór orientacji zaznaczono ciągłymi grubszymi liniami¹.



Rys. 2.2: Osiągalne kierunki i orientacje pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\varphi) = [q_1 + 1 \ q_2^2 - q_1]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej orientującej q_1 dla $q_1 \in [-5, 5]$ oraz $q_2 = 1$ (wykres z dyskretyzacją $\Delta q_1 = 0.5$).



Rys. 2.3: Osiągalne kierunki i orientacje pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\varphi) = [q_1 + 1 \ q_2^2 - q_1]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej orientującej q_1 dla $q_1 \in [-5, 5]$ oraz $q_2 = 1$ – rzut ortogonalny na płaszczyznę $g_2 \times g_3$.

Wprowadzone definicje zostaną wykorzystane w kolejnym rozdziale do analizy poszczególnych systemów nieholonomicznych, do których zastosowana zostanie metoda sterowania VFO.

¹Zwrot pola wektorowego wzdłuż każdej ciągłej linii należy rozumieć jako skierowany od początku układu do końca linii.

2.2.2 Podział trajektorii referencyjnych

W prezentowanej pracy zadania sterowania będą dotyczyć tylko tzw. dopuszczalnych trajektorii referencyjnych, gdyż tylko dla takich trajektorii można znaleźć prawa sterowania gwarantujące śledzenie asymptotyczne (z zerowym błędem ustalonym). Trajektorie dopuszczalne spełniają w każdej chwili więzy (1.6) nałożone na ruch sterowanego systemu. Poniższa definicja precyzuje pojęcie trajektorii dopuszczalnych.

Definicja 2.23 (Referencyjna trajektoria dopuszczalna) *Niech będzie dany system referencyjny:*

$$\Sigma_t : \quad \dot{\mathbf{q}}_t \triangleq \mathbf{g}_1 u_{1t} + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_t) u_{2t} \quad (2.27)$$

spełniający ograniczenia (1.6) i równoważny (co do struktury i parametrów) modelowi sterowanego systemu (2.1)-(2.2). Przez referencyjną trajektorię dopuszczalną określoną na przedziale $\tau \in [0, T], T > 0$ będziemy rozumieć rozwiązanie $\mathbf{q}_t(\tau)$ równania (2.27)

$$\mathbf{q}_t(\tau) = \mathbf{q}_t(0) + \int_0^\tau [\mathbf{g}_1 u_{1t}(\xi) + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_t) u_{2t}(\xi)] d\xi \quad (2.28)$$

dla zadanych warunków początkowych $\mathbf{q}_t(0)$ i zadanych sterowań referencyjnych $u_{it}(\tau) \in \mathcal{U}_t$, $i = 1, 2$ w czasie $\tau \in [0, T]$. Zbiór wszystkich referencyjnych trajektorii dopuszczalnych oznaczać będziemy symbolem \mathcal{T}_{AD} .

◇

Wśród trajektorii dopuszczalnych należy wyróżnić także rodzinę trajektorii *ustawicznie pobudzających*. Definicja ustawicznego pobudzenia zależy od przyjętych dodatkowych ograniczeń nakładanych na generowaną trajektorię referencyjną, a ściślej na sterowania referencyjne $u_{it}(\tau)$, $i = 1, 2$ w (2.28). W prezentowanej pracy ustawiczne pobudzenie należy rozumieć zgodnie z definicją podaną niżej.

Definicja 2.24 (Referencyjna trajektoria ustawicznie pobudzająca) *Każdą dopuszczalną trajektorię referencyjną (2.28), dla której*

$$u_{2t}(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \geq 0 \quad (2.29)$$

nazywać będziemy trajektorią referencyjną ustawicznie pobudzającą. Zbiór wszystkich referencyjnych trajektorii ustawicznie pobudzających oznaczać będziemy symbolem \mathcal{T}_{PE} .

◇

Przywołując (2.27), postać modelu (2.1)-(2.2) oraz zakładając regularność pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ można wnioskować, iż powyższy warunek ustawicznego pobudzenia implikuje następującą relację:

$$\forall \tau \geq 0 \quad \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \neq 0. \quad (2.30)$$

Relacja ta będzie wykorzystywana w dalszej części pracy.

Zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami wprowadzimy następujący jakościowy podział dopuszczalnych trajektorii referencyjnych $\mathbf{q}_t(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ dla systemu (2.1)-(2.2):

T1. *trajektoria popychająca:*

$$\mathbf{q}_t(\tau) : \quad \exists_{u_{it} \in \mathcal{U}_{tp}} u_{it}(\tau) \neq 0 \quad \wedge \quad \forall_{u_{it} \in \mathcal{U}_{to}} u_{it}(\tau) \equiv 0, \quad (2.31)$$

T2. *trajektoria orientująca:*

$$\mathbf{q}_t(\tau) : \quad \forall_{u_{it} \in \mathcal{U}_{tp}} u_{it}(\tau) \equiv 0 \quad \wedge \quad \exists_{u_{it} \in \mathcal{U}_{to}} u_{it}(\tau) \neq 0, \quad (2.32)$$

T3. *trajektoria popychająco-orientująca:*

$$\mathbf{q}_t(\tau) : \quad \exists_{u_{it} \in \mathcal{U}_{tp}} u_{it}(\tau) \neq 0 \quad \wedge \quad \exists_{u_{it} \in \mathcal{U}_{to}} u_{it}(\tau) \neq 0, \quad (2.33)$$

T4. *trajektoria zdegenerowana (stały punkt referencyjny):*

$$\mathbf{q}_t(\tau) : \quad \forall_{u_{it} \in \mathcal{U}_t} u_{it}(\tau) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_t(\tau) \stackrel{(2.28)}{=} \mathbf{q}_t(0), \quad (2.34)$$

gdzie $u_{it} \in \mathcal{U}_t = (\mathcal{U}_{to} \cup \mathcal{U}_{tp})$, $i = 1, 2$ stanowią sterowania referencyjne modelu Σ_t , a \mathcal{U}_{to} oraz \mathcal{U}_{tp} odpowiednio zbiory referencyjnych sterowań orientujących i popychających (zgodnie z definicjami 2.18 oraz 2.20).

Wprowadzony podział trajektorii pozwala traktować zadanie stabilizacji w punkcie jako szczególny przypadek śledzenia trajektorii zdegenerowanej [MS04]. Należy jednak pamiętać, że metodologia sterowania musi w tym przypadku uwzględniać wnioski wynikające z twierdzenia Brocketta [Bro83]. Nie wszystkie trajektorie T1-T4 mogą zostać zrealizowane przez konkretny system dynamiczny z rodziny Σ . Szczegółowa analiza rozważanych w kolejnym rozdziale kinematyk pokaże, iż trajektorię T1 można zrealizować tylko za pomocą systemu w pełni dekomponowalnego (zgodnie z def. 2.22). Nawiązując do przykładu 1 łatwo zauważyć, że skoro $u_2 \in \mathcal{U}_o \wedge u_2 \in \mathcal{U}_p$, to warunki definiujące trajektorię T1 w tym przypadku nie mogą być jednocześnie spełnione.

Na uwagę zasługuje wynik uzyskany przez Lizárragę i przedstawiony w pracy [Liz03], który mówi między innymi, iż dla systemu (2.1) nie istnieje uniwersalny ciągły sterownik² klasy C^0 zapewniający asymptotyczne śledzenie dowolnych dopuszczalnych trajektorii referencyjnych (czyli takich trajektorii (2.28), dla których sterowania referencyjne $u_{1t}, u_{2t} \in \mathcal{U}_t$ są dowolne). Na dzień dzisiejszy, metoda VFO pozwala na rozwiązanie zadań sterowania dla trajektorii referencyjnych T1, T3 (spełniających dodatkowo warunek ustawicznego pobudzenia (2.29)) oraz T4. Realizacja trajektorii typu T2 dla dowolnych warunków początkowych $\mathbf{q}(0)$ sterowanego systemu pozostaje nadal otwartym problemem badawczym.

2.3 Stosowalność metody VFO

Sterowanie metodą orientowania pól wektorowych znajduje zastosowanie do podklasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych zdefiniowanych modelem (2.1)-(2.2). Jednak sama postać modelu nie determinuje w pełni możliwości stosowania metody VFO. Trudno podać ogólne warunki dostateczne, których spełnienie gwarantuje stosowalność proponowanego podejścia. Ta kwestia pozostaje otwartym problemem badawczym. Można jednak

²W tym również sterownik jawnie zależny od czasu.

podać kilka warunków koniecznych. Niespełnienie jakiegokolwiek z nich powoduje problemy z realizacją prawa sterowania VFO w pewnych punktach przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{Q} w postaci osobliwości sterowania. W takich przypadkach pozostaje wyłączyć punkty osobliwe i ograniczyć stosowalność metody do pewnej podprzestrzeni $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, w której warunki konieczne są spełnione.

Stosowalność prawa sterowania VFO wymaga spełnienia dla systemu Σ (równania (2.1)-(2.2)) następujących warunków koniecznych dla każdego punktu $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$:

W1. system Σ jest w pełni sterowalny – spełnia warunek rzędu algebry Liego (LARC³),

W2. pole $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest regularne: $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad \|\mathbf{g}_2(\mathbf{q})\| \neq 0$,

W3. pole $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest ograniczone: $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}: \|\mathbf{q}\| < \infty \quad \|\mathbf{g}_2(\mathbf{q})\| < \infty$,

W4. pole $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ jest orientowalne w \mathbb{R}^{n-1} (zgodnie z def. 2.13).

Spełnienie pierwszego warunku gwarantuje istnienie takiego sterowania $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, które zastosowane do systemu (2.1)-(2.2) przeprowadza w czasie $\tau \in [0, T]$, $T < \infty$ dowolny stan początkowy $\mathbf{q}(0) \in \mathcal{Q}$ systemu (2.1) w jego dowolny stan końcowy $\mathbf{q}(T) \in \mathcal{Q}$ [NvdS90]. Spełnienie warunków W2 i W3 implikuje, iż pole wektorowe $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest dobrze określone i nieosobliwe w każdym punkcie przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{Q} . Regularność pola $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ oznacza także, iż jego orientacja definiowana równaniem (2.18) jest dobrze określona dla każdego punktu $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Warunek W4 ma szczególne znaczenie z punktu widzenia metody VFO. Spełnienie W4 zapewnia możliwość realizacji pożądanej orientacji $\bar{\alpha}$ pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ w przestrzeni \mathbb{R}^{n-1} poprzez zmianę wartości zmiennych konfiguracyjnych $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. Silniejszą własnością systemu jest oczywiście pełna orientowalność pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ w \mathbb{R}^{n-1} (zgodnie z def. 2.15), która pozwala osiągnąć dowolną orientację $\bar{\alpha}$ z przedziału $(-\pi, \pi]$. Brak własności pełnej orientowalności bardzo często jest związany również z brakiem własności pełnej kierowalności danego pola. Brak własności pełnej kierowalności natomiast implikuje pojawienie się kierunków osobliwych, wzdłuż których ewolucja podsystemu (2.4) nie jest możliwa. Występowanie kierunków osobliwych nie eliminuje jednak możliwości zastosowania metody VFO, co zostanie pokazane na przykładzie systemu łańcuchowego.

W przykładzie 1 z paragrafu 2.2.1 wykazano spełnienie warunków W1, W2 i W4. Definiując podprzestrzeń konfiguracyjną $\mathcal{Q}' \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{q}\| < \infty\}$ można wnioskować także o spełnieniu warunku W3. Wydaje się zatem, iż metoda VFO znajduje zastosowanie do systemu (2.26), choć brak własności pełnej kierowalności wskazuje na konieczność uwzględnienia kierunków osobliwych.

Etap projektowania sterowania metodą VFO winien być poprzedzony analizą rozważanego systemu z punktu widzenia spełnienia warunków W1-W4. Jeżeli powyższe warunki nie są spełnione w całej przestrzeni konfiguracyjnej ($\mathcal{Q} \neq \mathbb{R}^n$), wówczas należy precyzyjnie zdefiniować podprzestrzeń $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, dla której W1-W4 są zachowane. W kolejnym etapie można zaprojektować układ sterowania VFO i zastosować go do systemu Σ . Należy pamiętać jednak, że jego wykorzystanie będzie uzasadnione i dobrze określone tylko w ramach wcześniej zdefiniowanej podprzestrzeni \mathcal{Q}' . Z tego względu uzasadniona

³Lie Algebra Rank Condition.

wyda się konieczność wskazania formalnych warunków, dla których system sterowany nie opuszcza podprzestrzeni \mathcal{Q}' również w stanach przejściowych, startując z dowolnych warunków początkowych $\mathbf{q}(0) \in \mathcal{Q}'$.

2.4 Podsumowanie

Przedstawiona została ogólna koncepcja projektowania sterowania z wykorzystaniem metody orientowania pól wektorowych dla wcześniej zdefiniowanej podklasy Σ bezdryfowych układów nieholonomicznych. Proponowana metoda wynika z prostej geometrycznej interpretacji struktury modelu rozważanych systemów oraz ich potencjalnej ewolucji w odpowiedzi na specyficznym konstruowane sygnały wejściowe: sterowanie orientujące i sterowanie popychające. Zgodnie z metodologią VFO, zadanie sterowania zostało zdekomponowane na dwa podzadania: orientowanie i popychanie. Wprowadzono również podstawowe definicje związane z metodą VFO oraz pojęcie pola wektorowego zbieżności, którego postać odgrywa kluczową rolę w całym procesie sterowania. W następnym rozdziale zawarte wyżej rozważania oraz wprowadzone pojęcia i obiekty matematyczne będą bezpośrednio wykorzystane do zaprojektowania konkretnych praw sterowania VFO dla kilku przykładowych modeli systemów rodziny Σ , stanowiąc propozycję rozwiązania problemów śledzenia trajektorii zmiennych w czasie i stabilizacji w punkcie.

Zastosowania metody VFO

Rozdział ten poświęcony jest przykładom zastosowania metody orientowania pól wektorowych do konstrukcji praw sterowania dla zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie oraz dla zadania stabilizacji w punkcie. Wyprowadzenie równań sterowników dla kilku konkretnych przykładów systemów pozwoli na zilustrowanie ogólnej metodologii VFO przedstawionej w rozdziale 2. Jako pierwszy szczegółowo rozważony zostanie model robota dwukołowego (jednokołowego), który stanowi kanoniczny¹ przykład wykorzystania metody VFO. W dalszej części uwaga skupiona będzie na kolejnych systemach rodziny Σ takich, jak manipulator nieholonomiczny czy system łańcuchowy, przy czym wymiarowość wektora stanu ograniczymy w tych przypadkach do trzech zmiennych. Ostatnim systemem, do którego zastosujemy metodologię VFO będzie liniowy system afiniczny trzeciego rzędu z dryfem. Przykład ten ma stanowić próbę rozszerzenia zakresu stosowalności metodologii VFO na modele spoza rozważanej rodziny Σ . Analiza wszystkich kolejnych systemów, wyprowadzenie dla nich odpowiednich praw sterowania, a także procedury dowodowe zostaną przeprowadzone poprzez analogię do rozważań zawartych w pierwszym przykładzie dla robota jednokołowego. Efektywność wszystkich proponowanych rozwiązań zostanie zweryfikowana w oparciu o wyniki symulacyjne².

3.1 Dwukołowy robot mobilny

Systemem o dużym znaczeniu praktycznym jest pojazd dwukołowy przedstawiony na rys. 3.1. Kinematykę robota dwukołowego, przy zredukowaniu lewego i prawego koła do pojedynczego koła zastępczego³ (rys. 3.2), można zdefiniować następującym równaniem:

$$\Sigma_{UMR} : \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} u_2, \quad (3.1)$$

¹Określenie *kanoniczny* w odniesieniu do przykładu robota jednokołowego zostanie wyjaśnione w dalszej części tekstu.

²Wszystkie obliczenia numeryczne przedstawione w niniejszej pracy zostały wykonane za pomocą pakietu Matlab-Simulink.

³W literaturze system z pojedynczym kołem zastępczym nazywany jest *robotem jednokołowym*.

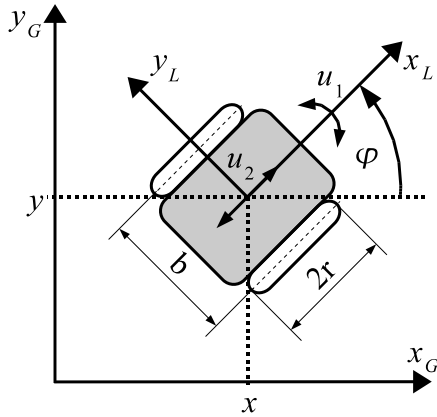
gdzie $\mathbf{q} \triangleq [\varphi \ x \ y]^T \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ jest wektorem stanu, a $u_1, u_2 \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ oznaczają sygnały wejściowe (w fizycznej interpretacji odpowiednio: prędkość kątową robota oraz prędkość liniową początku lokalnego układu współrzędnych $\{x_L, y_L\}$). Zmienne $x, y \in \mathbb{R}$ oznaczają współrzędne początku lokalnego układu współrzędnych przywiązanego w środku osi kół, a zmienna $\varphi \in \mathbb{R}$ stanowi kąt orientacji platformy robota względem dodatniej półosi x_G układu globalnego (por. rys. 3.1). Przywołując ogólną postać modeli podklasy (2.1)-(2.2) łatwo zauważyć, że $\Sigma_{UMR} \in \Sigma$ oraz:

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_2(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\varphi) \\ g_3(\varphi) \end{bmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_2^*(\varphi) \triangleq \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^* \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.2)$$

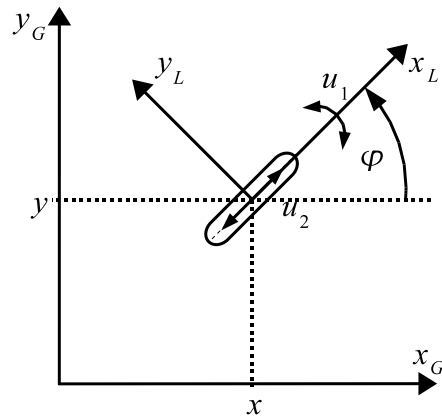
Niecałkowalne więzy kinematyczne związane z kinematyką (3.1) wynikają z założenia o braku poślizgu w kierunku równoległym do osi łączącej koła robota i mają postać Pfaffa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = [0 \ \sin \varphi \ -\cos \varphi] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad \dot{\mathbf{q}} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

Powyższe ograniczenia można prosto uzyskać eliminując element u_2 z dwóch ostatnich równań w (3.1).



Rys. 3.1: Dwukołowy robot mobilny w globalnym układzie współrzędnych $\{x_G, y_G\}$ (b – rozstaw kół, r – promień koła robota).



Rys. 3.2: Dwukołowy robot mobilny w globalnym układzie współrzędnych $\{x_G, y_G\}$ zredukowany do pojedynczego koła zastępczego.

Przeanalizujemy kinematykę systemu Σ_{UMR} pod względem własności związanych z metodologią VFO. Na początku sprawdzimy cztery warunki konieczne stosowalności metody. Warunek **W1**: można pokazać, że $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ system Σ_{UMR} jest w pełni sterowalny [NvdS90]:

$$\det(\mathbf{C}) = 1 \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{C}) = 3 = \dim(\mathbf{q}),$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą osiągalności⁴:

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2(\varphi) & [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2(\varphi)] \end{bmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

⁴Dla układów bezdryfowych pojęcie osiągalności jest tożsame pojęciu sterowalności.

Warunek **W2**: z postaci pola $\mathbf{g}_2(\varphi)$ wynika, że $\forall \varphi \in \mathcal{Q} \quad \|\mathbf{g}_2(\varphi)\| \equiv 1$ i wszystkie punkty $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ pola są regularne.

Warunek **W3**: obie składowe tego pola $g_2 = \cos \varphi, g_3 = \sin \varphi \in [-1, 1]$ są ograniczonymi funkcjami zmiennej φ i tylko tej zmiennej.

Warunek **W4**: zmiana wartości φ implikuje zmianę orientacji pola $\mathbf{g}_2^*(\varphi)$ w \mathbb{R}^2 :

$$\cos \alpha = \frac{z_1 \cos \varphi + z_2 \sin \varphi}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \Rightarrow \alpha = \alpha(\varphi) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \neq 0,$$

gdzie $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(\varphi), \mathbf{z})$, a $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ jest pewnym polem odniesienia. Zbiór kierunków i orientacji osiągalnych przez pole \mathbf{g}_2^* w przestrzeni \mathbb{R}^2 został pokazany na rys. 3.3 i 3.4. Ostatecznie warunki konieczne W1-W4 są dla systemu Σ_{UMR} spełnione.

Z powyższych rozważań wynika ponadto, że $\varphi \in \mathcal{Q}_o$ jest zmienną orientującą. Z pierwszego równania w (3.1) wynika również, że sygnał $u_1 \in \mathcal{U}_o$ jest sterowaniem orientującym, a φ jest zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio. Skoro $x, y \notin \mathcal{Q}_o$, to $u_2 \notin \mathcal{U}_o$, a jednocześnie $u_2 \in \mathcal{U}_p$, czyli jest sterowaniem popychającym. W przypadku systemu Σ_{UMR} zachodzi: $\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_p = \emptyset$ i w związku z tym mamy do czynienia z pełną dekomponowalnością modelu na jednowymiarowy podsystem Σ_{UMR}^1 wyłączenie orientujący i dwuwymiarowy podsystem Σ_{UMR}^* wyłączenie popychany:

$$\Sigma_{UMR}^1 : \dot{\varphi} = u_1, \quad (3.5)$$

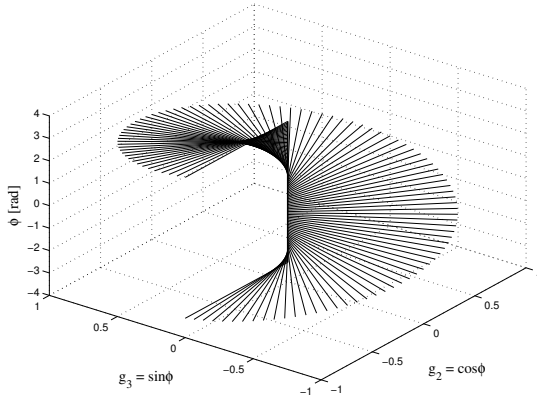
$$\Sigma_{UMR}^* : \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{g}_2^*(\varphi) u_2. \quad (3.6)$$

Co więcej, $\mathbf{g}_2^*(\varphi)$ jest w pełni orientowalne w \mathbb{R}^2 , a zgodnie z relacją **R4** jest ono także w pełni kierowalne w \mathbb{R}^2 (brak kierunków osobliwych – por. rys. 3.4), gdyż $\forall \bar{\alpha} \in (-\pi, \pi] \exists \bar{\varphi} \in \mathbb{R} : \angle(\mathbf{g}_2^*(\bar{\varphi}), \mathbf{z}) = \bar{\alpha}$. Ze względu na wymienione powyżej cechy oraz ze względu na specyficzną postać funkcji $g_2 = \cos \varphi, g_3 = \sin \varphi$, system (3.1) nazywany jest modelem *kanonicznym* z punktu widzenia zastosowania metody VFO. Analizując rys. 3.4 można zauważyć, że długości wektorów $\mathbf{g}_2^*(\varphi)$ są jednakowe dla każdego $\varphi \in \mathbb{R}$. Wynika z tego, iż przy ustalonym sterowaniu u_2 efektywność procesu popychania w przestrzeni \mathbb{R}^2 jest jednakowa w każdym kierunku tej przestrzeni (dodatkowo jest ona niezależna od wartości pozostałych zmiennych stanu x oraz y).

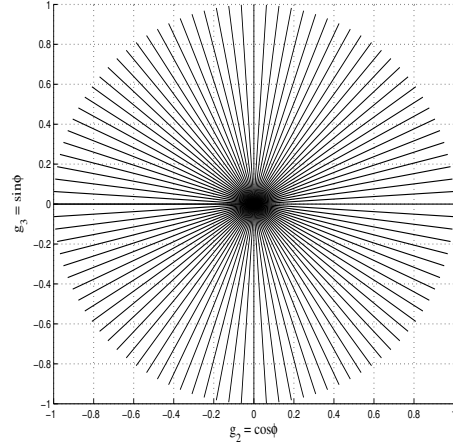
Przynależność sygnałów systemu (3.1) do odpowiednich zbiorów, z punktu widzenia metody VFO, można zapisać w postaci zestawu następujących relacji:

$$\Sigma_{UMR} : \begin{cases} \varphi \in \mathcal{Q}_o, \\ x, y \notin \mathcal{Q}_o, \\ u_1 \in \mathcal{U}_o, \\ u_2 \in \mathcal{U}_p, \\ U_o \cap U_p = \emptyset. \end{cases} \quad (3.7)$$

Kanoniczny model robota jednokołowego pozwala na realizację wszystkich czterech typów trajektorii T1-T4 wyróżnionych w poprzednim rozdziale. Każda z nich ma w tym szczególnym przypadku prostą interpretację geometryczną i fizykalną w podprzestrzeni $\mathcal{Q}^* = \{\mathbf{q}^* = [x \ y]^T\} \subset \mathbb{R}^2$. Trajektoria popychająca T1 implikuje ruch wzdłuż linii prostej (ze stałą orientacją) w podprzestrzeni \mathcal{Q}^* . Trajektoria orientująca natomiast (T2)



Rys. 3.3: Osiągalne kierunki i orientacje pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\varphi) = [\cos \varphi \ \sin \varphi]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej orientującej φ (na rys. oznaczonej jako ϕ) dla $\varphi \in [-\pi, \pi]$ (wykres z dyskretyzacją $\Delta\varphi = 2\pi/100$).



Rys. 3.4: Osiągalne kierunki i orientacje pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\varphi) = [\cos \varphi \ \sin \varphi]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej orientującej φ (na rys. oznaczonej jako ϕ) dla $\varphi \in [-\pi, \pi]$ – rzut ortogonalny na płaszczyznę $g_2 \times g_3$.

odpowiada obrotom platformy robota wokół osi przechodzącej przez początek układu lokalnego robota bez zmiany pozycji platformy w \mathcal{Q}^* . Ruch platformy ze zmienną orientacją wzdłuż krzywych w \mathcal{Q}^* zapewnia realizacja trajektorii popychająco-orientujących T3. Ostatnia zdegenerowana trajektoria T4 odpowiada pozostawianiu robota w spoczynku z zadaną pozycją i orientacją.

Rozważania zawarte w kolejnych trzech podpunktach częściowo oparte są na pracach [MK05c, MK05b] oraz [KMMP06].

3.1.1 Wykorzystanie metodologii VFO

Przyjmijmy na początku ogólną postać pola zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ bez definiowania poszczególnych składowych:

$$\mathbf{h}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ \mathbf{h}^*(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{h}^*(\cdot) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.8)$$

Do systemu Σ_{UMR} zastosujemy teraz ogólną strategię VFO opisaną zależnościami (2.10)-(2.12). Zgodnie z (2.11) szukamy takiego sterowania u_1 , które gwarantuje spełnienie relacji:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{g}_2^*(\varphi(\tau)) \parallel \mathbf{h}^*(\cdot) \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{g}_2^*(\varphi(\tau)) k(\tau) = \mathbf{h}^*(\cdot),$$

co na podstawie (3.2) oraz (3.8) implikuje:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} k(\tau) \cos \varphi(\tau) \\ k(\tau) \sin \varphi(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix},$$

gdzie $k(\tau)$ jest pewną niezerową funkcją skalarną. Nałożenie kierunków pól $\mathbf{g}_2^*(\varphi)$ i $\mathbf{h}^*(\cdot)$ wymaga spełnienia obu równań po prawej stronie powyższego wyrażenia. Możemy jednak połączyć oba równania w jedno, zależne od zmiennej orientującej $\varphi(\tau)$ otrzymując

konkretną postać relacji (2.11) dla modelu robota jednokołowego:

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \text{Atan2}(\text{sgn}(k)h_3(\cdot), \text{sgn}(k)h_2(\cdot)), \quad (3.9)$$

gdzie wyrażenie graniczne po prawej stronie (3.9) określa tzw. *warunek orientowania* dla modelu (3.1). Wykorzystanie funkcji $\text{sgn}(k)$ w powyższej relacji pozwoli na odpowiednie kształtowanie stanów przejściowych sterowanego systemu, co zostanie pokazane później. Z postaci pierwszego równania w (3.1) wynika, że (3.9) nie może być spełnione natychmiastowo ze względu na całkową zależność zmiennej orientującej od sterowania orientującego: $\varphi(\tau) = \varphi(0) + \int_0^\tau u_1(\xi)d\xi$. Proponuje się zatem wprowadzenie *pomocniczej zmiennej orientacji*:

$$\varphi_a(\tau) \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}(k)h_3(\cdot), \text{sgn}(k)h_2(\cdot)) \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

gdzie $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$ oznacza ciągłą wersję czteroćwiartkowej funkcji $\text{Atan2}(\cdot, \cdot)$ w takim sensie, że $\varphi_a \in [-\pi d, \pi d] \subset \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ (patrz uwaga 3.1 i Dodatek A.1). Pomocniczej zmiennej orientacji odpowiada teraz *pomocniczy błąd orientacji*:

$$e_a(\tau) \triangleq \varphi_a(\tau) - \varphi(\tau), \quad e_a(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Spełnienie (3.9) wymaga zatem znalezienia takiego sterowania u_1 , aby zapewnić asymptotyczną zbieżność błędu $e_a(\tau)$ do zera. Biorąc pod uwagę pierwsze równanie w modelu (3.1) oraz definicję (3.11) proponuje się następującą postać sterowania orientującego:

$$u_1 \triangleq k_1 e_a(\tau) + \dot{\varphi}_a(\tau), \quad (3.12)$$

gdzie $k_1 > 0$ jest współczynnikiem projektowym, a sygnał sprzężenia wyprzedzającego $\dot{\varphi}_a(\tau)$ ma postać ogólną:

$$\dot{\varphi}_a(\tau) \stackrel{(3.10)}{=} \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2 + h_3^2}, \quad \text{dla } h_2^2 + h_3^2 \equiv \|\mathbf{h}^*\| \neq 0. \quad (3.13)$$

Uwaga 3.1 Funkcję ciągłą $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$ w (3.10) wprowadzono, aby zapewnić ciągłość sygnału φ_a , a w konsekwencji (i z założenia, że $\varphi \in \mathbb{R}$) ciągłość sygnału błędu e_a w (3.11). Dyskretna realizacja funkcji⁵ $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$ polega na obliczeniu wartości funkcji nieciągłej $\text{Atan2}(\cdot, \cdot) = \Phi_a(iT_p) \in [-\pi, \pi]$, a następnie na wykorzystaniu zbioru reguł typu IF-THEN tak, aby zapewnić ciągłość ostatecznego wyniku⁶ $\varphi_a(iT_p)$ w takim sensie, że:

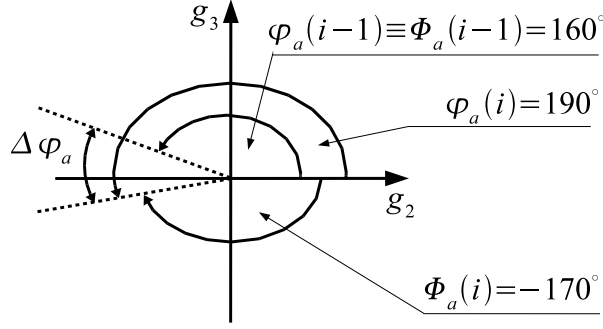
$$\varphi_a(iT_p) = \varphi_a((i-1)T_p) + \Delta\varphi_a, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (3.14)$$

gdzie $\Delta\varphi_a \in [-\pi, \pi]$ jest najmniejszą odległością kątową między $\Phi_a(iT_p)$ a $\Phi_a((i-1)T_p)$.

Koncepcję uciągania wyjaśnimy na przykładzie. Dla prostoty przyjmijmy miarę kątową i załóżmy, że $T_p = 1$, oraz $\Phi_a(i-1) \equiv \varphi_a(i-1) \triangleq 160^\circ$. Załóżmy także, że z bieżących obliczeń wynika, iż $\Phi_a(i) = \text{Atan2}(\cdot, \cdot) = -170^\circ$. Odległość kątowa między $\Phi_a(i)$ a $\Phi_a(i-1)$ wynosi: $\Delta\Phi_a = \Phi_a(i) - \Phi_a(i-1) = -170^\circ - 160^\circ = -330^\circ$. Jednak najmniejsza odległość kątowa w zakresie $[-\pi, \pi]$ wynosi $\Delta\varphi_a = \Delta\Phi_a + 360^\circ = 30^\circ$ i ostatecznie (zgodnie z metodą uciągania (3.14)) kąt $\varphi_a(i)$ wynosi: $\varphi_a(i) = 160^\circ + 30^\circ = 190^\circ$ a nie -170° (por. rys 3.5).

⁵Zarówno dla stałego jak i zmiennego okresu próbkowania T_p .

⁶Wyjaśnienie powyższe uzasadnia użycie określenia *uciąganie* funkcji, które oznacza, że z wyniku funkcji nieciągłej tworzymy wynik ciągły poprzez dodatkowe operacje.



Rys. 3.5: Ilustracja metody uciągania kąta φ_a jako wynik działania funkcji $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$.

W ciągłej dziedzinie czasu wynik działania funkcji z (3.10) równoważny jest następującej operacji (dla $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$):

$$\varphi_a(\tau) = \varphi_a(0) + \int_0^\tau \dot{\varphi}_a(\xi) d\xi \stackrel{(3.13)}{=} \varphi_a(0) + \int_0^\tau \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2 + h_3^2} d\xi \in \mathbb{R}.$$

Zgodnie z relacją (2.12) ogólnej strategii VFO, przyjmujemy następującą ogólną postać sterowania popychającego dla systemu Σ_{UMR} :

$$u_2 \triangleq k_2(\varphi) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha, \quad \alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(\varphi), \mathbf{h}^*), \quad (3.15)$$

gdzie

$$k_2(\varphi) \triangleq \frac{1}{\|\mathbf{g}_2^*(\varphi)\|} \stackrel{(3.1)}{=} 1 \quad \forall_{\varphi \in \mathbb{R}} \quad \text{oraz} \quad \cos \alpha \stackrel{(2.18)}{=} \frac{\mathbf{g}_2^{*T}(\varphi) \mathbf{h}^*}{\|\mathbf{g}_2^*(\varphi)\| \|\mathbf{h}^*\|}. \quad (3.16)$$

Zdefiniowany powyżej współczynnik skalujący $k_2(\varphi)$ jest w bieżącym przypadku nadmiarowy, ponieważ $\|\mathbf{g}_2^*\| \equiv 1$. Został on jednak wprowadzony w celu zachowania spójności i ogólności rozważań w odniesieniu do innych przykładów systemów podklasy Σ analizowanych w dalszej części pracy. Podstawiając (3.16) do propozycji (3.15) uzyskujemy uproszczoną postać sterowania popychającego dla systemu Σ_{UMR} :

$$u_2 = \mathbf{g}_2^{*T}(\varphi) \mathbf{h}^* \stackrel{(3.1)}{=} h_2 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi. \quad (3.17)$$

Przedstawioną metodologię VFO podsumowuje następująca propozycja.

Propozycja 3.1 (Sterownik VFO dla systemu Σ_{UMR} – postać ogólna) *Ogólna postać sterownika VFO dla modelu robota jednokołowego (3.1) gwarantująca rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie oraz zadania stabilizacji w punkcie jest następująca:*

$$\begin{aligned} u_1 &\triangleq k_1(\varphi_a - \varphi) + \dot{\varphi}_a, \\ u_2 &\triangleq k_2(\varphi) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha = h_2 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi, \end{aligned}$$

gdzie $k_1 > 0$, a $\varphi_a, \dot{\varphi}_a, k_2(\varphi)$ i $\cos \alpha$ zdefiniowane są odpowiednio zależnościami (3.10), (3.13), (3.16).

W dalszej części przedstawiona zostanie ostateczna postać prawa sterowania zarówno dla zadania śledzenia jak i stabilizacji w punkcie. Podstawowymi różnicami obu praw sterowania dla wymienionych zadań sterowania będą: definicja pola zbieżności $\mathbf{h}(\cdot)$ oraz sposób określania znaku funkcji $k(\tau)$ w wyrażeniu (3.10).

3.1.2 Zadanie śledzenia trajektorii

Dana jest pewna trajektoria referencyjna $\mathbf{q}_t(\tau)$, $\tau \in [0, T)$, gdzie $T > 0$ jest horyzontem czasowym śledzenia. Zakładamy, że $\mathbf{q}_t(\tau)$ należy do zbioru trajektorii dopuszczalnych \mathcal{T}_{AD} i ustawicznie pobudzających \mathcal{T}_{PE} , tzn. (zgodnie z def. 2.23 i 2.24):

$$\mathbf{q}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_t(\tau) \\ x_t(\tau) \\ y_t(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_t(\tau) \\ \mathbf{q}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_t(0) + \int_0^\tau u_{1t}(\xi) d\xi \\ x_t(0) + \int_0^\tau \cos \varphi_t(\xi) u_{2t}(\xi) d\xi \\ y_t(0) + \int_0^\tau \sin \varphi_t(\xi) u_{2t}(\xi) d\xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad \forall_{\tau \in [0, T)} u_{2t}(\tau) \neq 0. \quad (3.18)$$

Ponadto zakładamy, że:

$$u_{1t}(\tau), u_{2t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty, \mathcal{C}^1. \quad (3.19)$$

Prędkość referencyjna wzdłuż trajektorii dopuszczalnej $\mathbf{q}_t(\tau)$ wynika z postaci modelu Σ_{UMR} lub bezpośrednio z różniczkowania (3.18):

$$\dot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_t(\tau) \\ \dot{x}_t(\tau) \\ \dot{y}_t(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_t(\tau) \\ \mathbf{q}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} u_{1t}(\tau) \\ \cos \varphi_t(\tau) u_{2t}(\tau) \\ \sin \varphi_t(\tau) u_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.20)$$

Przyspieszenie referencyjne wzdłuż trajektorii $\mathbf{q}_t(\tau)$ wynika z różniczkowania (3.20):

$$\ddot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_t(\tau) \\ \ddot{x}_t(\tau) \\ \ddot{y}_t(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.20)}{=} \begin{bmatrix} \dot{u}_{1t}(\tau) \\ -u_{1t}(\tau) \sin \varphi_t(\tau) u_{2t}(\tau) + \cos \varphi_t(\tau) \dot{u}_{2t}(\tau) \\ u_{1t}(\tau) \cos \varphi_t(\tau) u_{2t}(\tau) + \sin \varphi_t(\tau) \dot{u}_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.21)$$

Zgodnie z (3.20), definicję referencyjnej orientacji platformy robota $\varphi_t(\tau)$ z (3.18) można określić w następujący równoważny sposób:

$$\varphi_t(\tau) \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}(u_{2t})\dot{y}_t(\tau), \text{sgn}(u_{2t})\dot{x}_t(\tau)) \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

gdzie $\text{sgn}(u_{2t})$ określa strategię ruchu wzdłuż trajektorii referencyjnej: *ruch do przodu* / *ruch do tyłu*. W przypadku trajektorii ustawicznie pobudzającej (3.18) mamy:

$$\forall_{\tau \geq 0} u_{2t}(\tau) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sgn}(u_{2t}) = \text{const.} \quad \stackrel{(3.20)}{\implies} \quad \forall_{\tau \geq 0} \dot{x}_t^2(\tau) + \dot{y}_t^2(\tau) \neq 0$$

i definicja (3.22) jest dobrze określona dla każdego $\tau \geq 0$.

Uwaga 3.2 Zgodnie z podziałem trajektorii referencyjnych z rozdziału 2 oraz zgodnie z powyższymi implikacjami, rozpatrywane tutaj trajektorie dopuszczalne (3.18) zostają ograniczone do typów T1 lub T3.

Zdefiniujmy błąd śledzenia trajektorii referencyjnej jako:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} e_\varphi(\tau) \\ e_x(\tau) \\ e_y(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_\varphi(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{q}_t(\tau) - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_t(\tau) - \varphi(\tau) \\ x_t(\tau) - x(\tau) \\ y_t(\tau) - y(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.23)$$

Określmy teraz konkretne wyrażenia definiujące jednoznacznie ogólną postać sygnałów sterujących u_1, u_2 metody VFO przedstawionych w propozycji 3.1 dla zadania śledzenia. W tym celu zdefiniujemy element $\text{sgn}(k)$ występujący w wyrażeniu (3.10) oraz pole zbieżności $\mathbf{h} \stackrel{(3.8)}{\triangleq} [h_1 \mathbf{h}^{*T}]^T$.

Postać funkcji $k(\tau)$ w definicji (3.10) nie musi być określona w sposób jawny, ponieważ tylko znak tej funkcji jest w tym przypadku istotny. Aby zapewnić zgodność strategii ruchu robota (*ruch do przodu/do tyłu*) z żadaną strategią ruchu wzdłuż trajektorii referencyjnej (por. (3.22)), postuluje się spełnienie następującej relacji:

$$\text{sgn}(k(u_{2t}(\tau), \cdot)) \triangleq \text{sgn}(u_{2t}), \quad (3.24)$$

przy czym $\text{sgn}(u_{2t}) \equiv \text{sgn}(u_{2t}(\tau))$ nie zmienia się w całym horyzoncie sterowania dla $\tau \geq 0$ ze względu na warunek ustawicznego pobudzenia (por. (3.18)).

Przejdźmy teraz do kwestii pola zbieżności. Zdefiniujmy na początku następujący wektor zbieżności w \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_t^*) \stackrel{(3.8)}{\triangleq} \begin{bmatrix} h_2(e_x, \dot{x}_t) \\ h_3(e_y, \dot{y}_t) \end{bmatrix} \triangleq k_p \mathbf{e}^*(\tau) + \dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) = \begin{bmatrix} k_p e_x(\tau) + \dot{x}_t(\tau) \\ k_p e_y(\tau) + \dot{y}_t(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.25)$$

gdzie $k_p > 0$ jest współczynnikiem projektowym. Powyższa definicja stanowi liniową kombinację błędu pozycji oraz sygnału wyprzedzającego. Występowanie składnika wyprzedzającego odróżnia proponowaną postać pola zbieżności od definicji klasycznych, w których zwykle $\mathbf{h}^* \equiv \mathbf{e}^*$. W konsekwencji, pole (3.25) jest również określone na trajektorii referencyjnej (czyli dla $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$) i równe jest wtedy prędkości referencyjnej $\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)$.

Przyjmijmy ponadto następującą definicję pozostałej składowej pełnego pola $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$, mianowicie:

$$h_1(e_a, \dot{\varphi}_a) \triangleq k_1 e_a(\tau) + \dot{\varphi}_a(\tau), \quad (3.26)$$

gdzie $k_1 > 0$ jest parametrem projektowym. Można powiedzieć, że składowa h_1 definiuje sposób zbieżności dla zmiennej orientującej $\varphi(\tau)$. Z porównania (3.12) i (3.26) wynika, że $u_1 \triangleq h_1$. Pełna postać zaproponowanego pola zbieżności jest następująca:

$$\mathbf{h}(e_a, \dot{\varphi}_a, \mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_t^*) \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_a(\tau) + \dot{\varphi}_a(\tau) \\ k_p e_x(\tau) + \dot{x}_t(\tau) \\ k_p e_y(\tau) + \dot{y}_t(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Każda składowa tego pola jest kombinacją błędu i sygnału wyprzedzającego, jednak element h_1 nie jest definiowany w oparciu o błąd śledzenia $e_\varphi \triangleq \varphi_t - \varphi$, a o pomocniczy błąd orientacji $e_a \triangleq \varphi_a - \varphi$. Jest to następna różnica w stosunku podejścia klasycznego

stosowanego w literaturze przedmiotu, w którym zwykle próbuje się jednocześnie minimalizować wszystkie trzy błędy śledzenia e_φ, e_x, e_y pomimo specyficznych ograniczeń nałożonych na ruch systemu Σ_{UMR} . Strategia klasyczna może powodować w tym przypadku niepożądaną w praktyce dużą oscylacyjność stanów przejściowych i dużą liczbę nawrotów robota. Natomiast wprowadzenie propozycji (3.26) wskazuje, iż zmienna φ winna zbiegać do pomocniczej zmiennej φ_a , co może powodować początkowe powiększenie się błędu e_φ w stanie przejściowym. Taka strategia jednak zapewnia szybką i naturalną zbieżność $\mathbf{q}^* = [x \ y]^T$ w pobliże trajektorii referencyjnej \mathbf{q}_t^* . Dopiero po znalezieniu się systemu w okolicy \mathbf{q}_t^* , pomocniczy kąt orientacji φ_a będzie przechodził w sposób ciągły w kąt referencyjny φ_t (przynajmniej w sensie dziedziny \mathbb{S}^1), a pomocniczy błąd orientacji e_a stanie się błędem śledzenia e_φ (w \mathbb{S}^1). Zapewnienie zbieżności e_a do zera (co jest celem procesu orientowania) będzie w efekcie skutkowało zbieżnością orientacji platformy robota do wartości referencyjnej φ_t (w \mathbb{S}^1) w okolicy punktu \mathbf{q}_t^* . Taki sposób dochodzenia do trajektorii referencyjnej jest zgodny z intuicją i codziennym doświadczeniem kierowców pojazdów kołowych⁷.

Uwaga 3.3 Można zaproponować inną postać składowej h_1 wykorzystując dodatkowo w definicji (3.26) funkcję skalującą $k(\tau)$:

$$h_1(e_a, \dot{\varphi}_a) \triangleq k(\cdot)[k_1 e_a(\tau) + \dot{\varphi}_a(\tau)]. \quad (3.27)$$

Wtedy można zapisać nieco inną i użyteczną relację określającą warunek nakładania pól. Mianowicie gdyby w (2.13) zamiast prędkości $\dot{\mathbf{q}}^* \in \mathbb{R}^2$ wziąć prędkość $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$ i próbować nałożyć je na pełne pole zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$, to relacja (2.13) przeszłaby w następujące wyrażenie:

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(\tau) \parallel \mathbf{h}(\cdot) \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(\tau) k(\tau) = \mathbf{h}(\cdot)$$

co na podstawie (3.1) daje

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} u_1(\tau)k(\tau) \\ \cos \varphi(\tau) u_2(\tau)k(\tau) \\ \sin \varphi(\tau) u_2(\tau)k(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Powyzsza relacja implikuje $u_1 \triangleq \frac{1}{k(\tau)} h_1(\cdot)$ i daje w efekcie te same wyrażenia (3.10), (3.12) na pomocniczą zmienną orientacji i sterowanie orientujące, gdy $h_1(\cdot)$ będzie określone przez (3.27), a postulat (3.24) zostanie zmodyfikowany jak następuje:

$$\text{sgn}(k(u_{2t}(\tau), u_2(\tau), \cdot)) \triangleq \text{sgn}(u_2(\tau)) \text{sgn}(u_{2t}).$$

Wyżej sformułowana relacja stanowi próbę uogólnienia metody VFO na systemy spoza rodziny Σ , które nie wymagają spełnienia ograniczeń nieholonomicznych. Do kwestii takiego uogólnienia wrócimy w dalszej części pracy.

⁷Podobnie zachowałyby się pilot samolotu lub sternik statku, w których to przykładach nawroty systemu są niemożliwe lub długotrwałe, kosztowne i mało efektywne.

STEROWNIK 1 Sterownik VFO (3.12)-(3.17) dla systemu Σ_{UMR} dedykowany do zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie ma następującą postać (przy założeniu, że $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$):

$$u_1 \stackrel{(3.12)}{=} k_1(\varphi_a - \varphi) + \dot{\varphi}_a, \quad (3.28)$$

$$u_2 \stackrel{(3.17)}{=} (k_p e_x + \dot{x}_t) \cos \varphi + (k_p e_y + \dot{y}_t) \sin \varphi, \quad (3.29)$$

$k_1, k_p > 0$, gdzie postać φ_a wynika z (3.10), (3.25) oraz (3.24):

$$\varphi_a \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}(u_{2t})(k_p e_y + \dot{y}_t), \text{sgn}(u_{2t})(k_p e_x + \dot{x}_t)) \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

postać $\dot{\varphi}_a$, na podstawie (3.13) i (3.25), wyraża się wzorem:

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2 + h_3^2}, \quad (3.31)$$

w którym

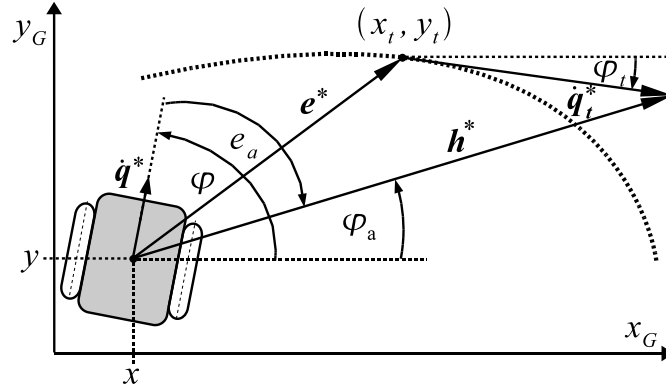
$$h_2 \stackrel{(3.25)}{=} k_p(x_t - x) + \dot{x}_t, \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_2 = k_p(\dot{x}_t - \dot{x}) + \ddot{x}_t,$$

$$h_3 \stackrel{(3.25)}{=} k_p(y_t - y) + \dot{y}_t, \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_3 = k_p(\dot{y}_t - \dot{y}) + \ddot{y}_t,$$

a sygnały referencyjne \dot{x}_t, \dot{y}_t oraz \ddot{x}_t, \ddot{y}_t wynikają z (3.20)-(3.21).

♣

Ilustrację poszczególnych sygnałów wykorzystywanych do realizacji zadania śledzenia metodą VFO przedstawia rys. 3.6.



Rys. 3.6: Dwukołowy robot mobilny podczas realizacji zadania śledzenia trajektorii zmiennej w czasie metodą VFO (przyjęto $k_p = 1$).

Twierdzenie 3.1 Dana jest trajektoria referencyjna (3.18)-(3.19) oraz obszar w dziedzinie błędu śledzenia: $\mathcal{E}_{UMR}^* \triangleq \mathbb{R}^2 \setminus \{e^*(\tau) : e^*(\tau) = -\frac{1}{k_p} \dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\}$. Zakładając, że:

$$\forall_{\tau \geq 0} e^*(\tau) \in \mathcal{E}_{UMR}^* \stackrel{(3.25)}{\implies} \forall_{\tau \geq 0} \|\mathbf{h}^*(\tau)\| \neq 0 \quad (3.32)$$

ciągłe prawo sterowania VFO (3.28)-(3.29) zastosowane do systemu (3.1) gwarantuje globalną asymptotyczną zbieżność błędu śledzenia (3.23) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_x(\tau), e_y(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 2\pi d, \quad d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{E}_{UMR}^*$.

Dowód. Rozważmy na początku zachowanie zmiennej orientującej φ . Podstawiając (3.28) do (3.1) uzyskujemy następujące równanie:

$$(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}) + k_1(\varphi_a - \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_a + k_1 e_a = 0,$$

z którego wynika, że φ zmierza wykładniczo do wartości pomocniczej zmiennej orientacji φ_a dla $\tau \rightarrow \infty$:

$$e_a(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_a(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \varphi_a(\tau). \quad (3.33)$$

Sterowanie orientujące (3.28) gwarantuje zatem spełnienie warunku orientowania (3.9).

Rozważmy teraz zachowanie błędu pozycji e^* . Na podstawie (3.23) i (3.25) możemy zapisać:

$$e^* = \dot{q}_t^* - \dot{q}^* \quad \text{oraz} \quad \dot{q}_t^* \stackrel{(3.25)}{=} h^* - k_p e^*.$$

Podstawiając prawą stronę ostatniego równania do równania z lewej strony otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\dot{e}^* + k_p e^* = r, \quad \text{gdzie} \quad r \triangleq h^* - \dot{q}^*. \quad (3.34)$$

Można prosto pokazać (Dodatek B.1), że prawdziwe są równania:

$$\|r\|^2 = \|h^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (3.35)$$

gdzie $\cos \alpha$ jest zdefiniowany w (3.16) oraz (Dodatek B.1)

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} (1 - \cos^2 \alpha(\varphi)) = 0. \quad (3.36)$$

Zaproponujmy następującą dodatnio określoną funkcję klasy \mathcal{K}_∞ :

$$V(e^*) \triangleq \frac{1}{2} e^{*T} e^* \in \mathcal{K}_\infty. \quad (3.37)$$

Pochodną tej funkcji oszacujemy w następujący sposób (dla prostoty użyta zostanie notacja $\gamma = \gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(\varphi(\tau))} \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^{*T} \dot{e}^* \stackrel{(3.34)}{=} e^{*T} (-k_p e^* + r) = \\ &= -k_p \|e^*\|^2 + e^{*T} r \leq \\ &\leq -k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|r\| = \\ &\stackrel{(3.35)}{=} -k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|h^*\| \gamma = \\ &\stackrel{(3.25)}{=} -k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|k_p e^* + \dot{q}_t^*\| \gamma \leq \\ &\leq -k_p \|e^*\|^2 + \gamma k_p \|e^*\|^2 + \gamma \|e^*\| \|\dot{q}_t^*\| = \\ &= -k_p (1 - \gamma) \|e^*\|^2 + \gamma \|e^*\| \|\dot{q}_t^*\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\dot{V} \leq -W(\|e^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\|, \gamma(\tau)), \quad (3.38)$$

gdzie funkcja ciągła

$$W(\|e^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\|, \gamma(\tau)) = k_p(1 - \gamma(\tau)) \|e^*(\tau)\|^2 - \gamma(\tau) \|e^*(\tau)\| \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \quad (3.39)$$

jest dodatnio określona dla

$$\|e^*(\tau)\| > \Gamma(\tau), \quad \Gamma(\tau) = \frac{\gamma(\tau) \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\|}{k_p(1 - \gamma(\tau))}. \quad (3.40)$$

Z założenia (3.19) wynika, że $\|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$. Zgodnie z twierdzeniem La Salla-Yoshizawy, wszystkie trajektorie $e^*(\tau)$, dla których $\|e^*(\tau)\| > \Gamma(\tau)$ i $\gamma(\tau) < 1$ są ograniczone i spełniają warunek [TMD⁺00, Sas99]:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W(\tau) = 0 \stackrel{(3.39, 3.40)}{\implies} \|e^*(\tau)\|, \|\dot{e}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|e^*(\tau)\| = \Gamma(\tau). \quad (3.41)$$

Przypadek, w którym dla pewnego $\hat{\tau}$ zachodzi $\gamma(\hat{\tau}) = 1$ powoduje chwilowe wstrzymanie zbieżności błędu e^* , a w interpretacji geometrycznej odpowiada on przejściu kąta $\alpha(\varphi(\tau))$ przez wartość $\pm\pi/2$. Taka sytuacja może zajść jedynie w stanie przejściowym, a stan dla którego ona zachodzi jest nie przyciągający. Z (3.33) oraz (3.36) wynika, że $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau) = 0$, gdzie $\gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(\varphi(\tau))}$. Zatem na podstawie (3.40) mamy:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma(\tau) = 0 \stackrel{(3.41)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|e^*(\tau)\| = 0 \implies \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_x(\tau), e_y(\tau) = 0. \quad (3.42)$$

Ponadto z definicji (3.30), (3.25) oraz (3.22), a także z wniosków (3.42) i (3.33) wynika, że:

$$\begin{aligned} \lim_{e_x, e_y \rightarrow 0} \varphi_a(e_x, e_y) \bmod 2\pi = \varphi_t(\tau) &\stackrel{(3.11, 3.23, 3.42)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_a(\tau) = e_\varphi(\tau) \bmod 2\pi \stackrel{(3.33)}{\implies} \\ &\stackrel{(3.33)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 2\pi d, \end{aligned} \quad (3.43)$$

gdzie $d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Skoro $\|e^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$, to z (3.25) wynika, że $\|\mathbf{h}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$, a z definicji (3.29) wynika, że $u_2(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Można również pokazać, iż $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_2(\tau) = u_{2t}(\tau)$. Z założenia (3.32), z wniosku $\|\dot{e}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ oraz z definicji (3.31) i założenia (3.19) wynika: $\dot{\varphi}_a(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Łatwo sprawdzić również, że $\lim_{\|e^*\| \rightarrow 0} \dot{\varphi}_a(e^*) = \dot{\varphi}_t(\tau)$, co z kolei z wnioskiem (3.33) oraz z definicją (3.28) implikuje: $u_1(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_1(\tau) = u_{1t}(\tau)$. □

Uwaga 3.4 Zbieżność błędu $e_\varphi(\tau) \in \mathbb{R}$ do wartości $2\pi d$ oznacza osiągnięcie zerowej wartości różnicy $\varphi_t(\tau) - \varphi(\tau)$ w dziedzinie \mathbb{S}^1 , [Sø93]. Z tego względu wartości $\{0, \pm 2\pi, \dots\}$ błędu $e_\varphi(\tau)$ są traktowane jako równoważne w \mathbb{S}^1 .

Uwaga 3.5 Powyżej udowodniona została jedynie asymptotyczna zbieżność błędu e^* . Jednak poprzez prostą analizę zachowania się funkcji $W(\|e^*\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*\|, \gamma)$ można wyciągnąć pewne wnioski dotyczące szybkości tej zbieżności. Mianowicie, skoro $\gamma \rightarrow 0$, to w postaci

funkcji w (3.39) wynika, że $\lim_{\gamma \rightarrow 0} W(\|e^*\|, \|\dot{q}_t^*\|, \gamma) = k_p \|e^*\|^2 = 2k_p V(e^*)$ i w tej granicy uzyskuje się wykładniczą zbieżność e^* do zera ze stałą czasową zależną bezpośrednio od wartości k_p . Zbieganie γ to zera jest tylko asymptotyczne (nie w skończonym czasie), zatem ściśle rzecz biorąc funkcja W nigdy nie osiągnie postaci $k_p \|e^*\|^2$. Można jednak wnioskować, iż przy dużej efektywności procesu orientowania pola g_2^* (czyli wystarczająco dużej wartości współczynnika k_1 w (3.28)) zachodzi:

$$\exists_{\tau_\gamma < \infty} : \forall_{\tau > \tau_\gamma} \gamma(\tau) \leq \epsilon_\gamma \Rightarrow \forall_{\tau > \tau_\gamma} W(\|e^*(\tau)\|, \|\dot{q}_t^*(\tau)\|, \gamma(\tau)) \approx k_p \|e^*(\tau)\|^2,$$

gdzie $0 < \epsilon_\gamma \ll 1$ jest bardzo małe, a zbieżność $e^*(\tau)$ jest bardzo szybka i ma charakter zbliżony do wykładniczego.

Uwaga 3.6 Definicje (3.10) oraz (3.13), a tym samym sterowanie (3.28), nie są określone w przypadku, gdy $h^*(e^*(\bar{\tau}), \cdot) = \mathbf{0} \Rightarrow \exists_{\bar{\tau} < \infty} e^*(\bar{\tau}) \notin \mathcal{E}_{UMR}^*$ (por. założenie (3.32)), czyli dla:

$$e_x(\bar{\tau}) \stackrel{(3.25)}{=} -\frac{\dot{x}_t(\bar{\tau})}{k_p} \quad \wedge \quad e_y(\bar{\tau}) \stackrel{(3.25)}{=} -\frac{\dot{y}_t(\bar{\tau})}{k_p}.$$

Powyższe warunki mogą zajść tylko w stanach przejściowych, a w praktyce (oraz w symulacji) są bardzo rzadkie i odpowiadają sytuacji, w której robot sterowany znajduje się dokładnie naprzeciwko ($e_\varphi(\bar{\tau}) = -\pi$) trajektorii referencyjnej q_t^* w odległości $\|e^*(\bar{\tau})\| = \sqrt{e_x^2(\bar{\tau}) + e_y^2(\bar{\tau})}$. W takim przypadku należy podać dodatkowe definicje dla sygnałów $\varphi_a, \dot{\varphi}_a$, które będą mogły być wykorzystane w punktach $h^*(\bar{\tau}) = \mathbf{0}$ lub w otoczeniu tych punktów.

Przedstawimy teraz pewną modyfikację, która pozwoli na dobre zdefiniowanie sterownika VFO dla dowolnych $h^* \in \mathbb{R}^2$ (lub równoważnie w całej dziedzinie błędu $e^* \in \mathbb{R}^2$). Wprowadźmy następujące dodatkowe definicje sygnałów pomocniczych $\varphi_a, \dot{\varphi}_a$:

$$\varphi_a(\tau) = \varphi_a \stackrel{\Delta}{=} \varphi_a(\bar{\tau}_-), \quad (3.44)$$

$$\dot{\varphi}_a(\tau) = \dot{\varphi}_a \stackrel{\Delta}{=} 0. \quad (3.45)$$

Modyfikacja sterowania VFO mająca na celu dobre zdefiniowanie sygnałów sterujących u_1 i u_2 w całej dziedzinie błędu e^* (lub równoważnie dla dowolnych $h^* \in \mathbb{R}^2$), wynika teraz z następującej propozycji.

Propozycja 3.2 Dla danej trajektorii referencyjnej (3.18), odcinkami ciągle prawo sterowania VFO (3.28)-(3.29), w którym:

$$\varphi_a(\tau), \dot{\varphi}_a(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} (3.30), (3.31) & \text{dla } \|h^*(\tau)\| > \epsilon, \\ (3.44), (3.45) & \text{dla } \|h^*(\tau)\| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (3.46)$$

gdzie $0 < \epsilon < \inf_{\tau} |u_{2t}(\tau)|$ jest założonym otoczeniem punktu $h^*(\tau) = \mathbf{0}$, zastosowane do systemu (3.1) pozwala na zachowanie globalnej asymptotycznej zbieżności błędów śledzenia w sensie zdefiniowanym w twierdzeniu 3.1 dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$.

Zgodnie z powyższą propozycją, definicja (3.28) jest nadal aktualna z tym, że sygnały $\varphi_a(\tau), \dot{\varphi}_a(\tau)$ w niej zawarte mogą mieć charakter nieciągły w dziedzinie czasu (są ciągłe tylko w sensie C^0). W efekcie, własność ciągłości sterowania (3.28) zostaje uchylona na rzecz ciągłości odcinkami. Warto podkreślić, że zbiór punktów nieciągłości $h^*(\tau) = \mathbf{0}$ jest potencjalnie osiągalny jedynie w stanach przejściowych i jest nieprzyciągający.

3.1.3 Zadanie stabilizacji w punkcie

Zadanie stabilizacji w punkcie może być rozważane jako szczególny przypadek śledzenia trajektorii zdegenerowanej (typu T4) [MS04]. Przyjmując w definicji (3.18) zerowe wartości referencyjnych sygnałów wejściowych $u_{1t} = u_{2t} \equiv 0$ otrzymamy zdegenerowaną, stałą w czasie trajektorię typu T4 w postaci punktu referencyjnego:

$$\mathbf{q}_t \stackrel{(3.18)}{=} \begin{bmatrix} \varphi_t(0) \\ x_t(0) \\ y_t(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ x_t \\ y_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.47)$$

Zdefiniujmy błąd stabilizacji jako:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} e_\varphi(\tau) \\ e_x(\tau) \\ e_y(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_\varphi(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_t - \varphi(\tau) \\ x_t - x(\tau) \\ y_t - y(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.48)$$

Skoro trajektoria zdegenerowana jest stałym punktem w \mathbb{R}^3 , oczywistym jest, że uogólniona prędkość referencyjna $\dot{\mathbf{q}}_t(\tau)$ z (3.20) jest tożsamościowo równa zeru. Zauważmy jednak, że prędkość $\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \in \mathbb{R}^2$ w tym przypadku można przedstawić w następujący sposób:

$$\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \stackrel{(3.20)}{=} \begin{bmatrix} \cos \varphi_t(\tau) \\ \sin \varphi_t(\tau) \end{bmatrix} u_{2t}(\tau) \stackrel{(3.47)}{=} \begin{bmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{bmatrix} \cdot 0 = \mathbf{g}_{2t}^*(\varphi_t) \cdot 0, \quad (3.49)$$

gdzie $u_{2t}(\tau) \equiv 0$, ale $\mathbf{g}_{2t}^*(\varphi_t) \neq \mathbf{0} \forall \varphi_t \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że pole $\mathbf{g}_{2t}^*(\varphi_t) \in \mathbb{R}^2$ nie degeneruje się w punkcie referencyjnym (3.47) i w rzeczywistości definiuje referencyjną orientację (oraz kierunek) pola w punkcie $\mathbf{q}_t^* = [x_t \ y_t]^T \in \mathbb{R}^2$. Własność tę wykorzystamy do konstrukcji pola zbieżności \mathbf{h}^* dla przypadku śledzenia trajektorii zdegenerowanej (stabilizacji w punkcie) poprzez analogię do propozycji (3.25).

Wprowadźmy tzw. *wirtualną prędkość referencyjną* postaci:

$$\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_{vt}(\tau) \\ \dot{y}_{vt}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \mathbf{g}_{2t}^*(\varphi_t) = \delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \begin{bmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.50)$$

gdzie $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$ jest funkcją ciągłą taką, że $\delta(\mathbf{e}^* = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Z porównania (3.20) i (3.49) wynika, iż wirtualna prędkość referencyjna $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau)$ różni się od rzeczywistej prędkości referencyjnej $\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)$ tym, że zamiast zerowego (w tym przypadku) sterowania referencyjnego $u_{2t}(\tau)$ wykorzystuje pewną funkcję $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$, która zmierza do zera w granicy dla $\mathbf{e}^*(\tau) \rightarrow \mathbf{0}$. Wprowadzenie funkcji $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$ pozwala na odpowiednie kształtowanie stanów przejściowych systemu sterowanego i zbieżność orientacji platformy φ do wartości referencyjnej φ_t . Postać tej funkcji zależy od projektanta systemu i daje pewną swobodę w zakresie kształtowania stanów przejściowych. Proponuje się następującą postać funkcji:

$$\delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \triangleq -\frac{\eta \operatorname{sgn}(k)}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\varphi_t)\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \stackrel{(3.49)}{=} -\eta \operatorname{sgn}(k) \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \quad 0 < \eta < k_p, \quad (3.51)$$

gdzie η jest dodatkowym współczynnikiem projektowym, a $k = k(\tau)$ jest funkcją skalarną występującą w relacjach (2.11) oraz (3.9). Z tego względu, iż dla referencyjnej trajektorii

zdegenerowanej mamy $u_{2t} \equiv 0$, postulat (3.24) zmodyfikujemy na rzecz następującego założenia:

$$\text{sgn}(k(\mathbf{e}^*(\tau), \cdot)) \triangleq \text{sgn}(e_{x0}), \quad (3.52)$$

gdzie $e_{x0} \equiv e_x(0)$ stanowi początkową wartość błędu $e_x(\tau)$. Podobnie jak w przypadku zadania śledzenia trajektorii ustawicznie pobudzających, znak funkcji $k(\tau)$ będzie determinował strategię ruchu robota (*ruch do przodu/do tyłu*) w stanach przejściowych, lecz tym razem wybór strategii zależy od początkowej pozycji robota względem punktu referencyjnego \mathbf{q}_t^* wzdłuż osi x .

Podstawiając teraz (3.51) do (3.50) z uwzględnieniem (3.52) otrzymujemy następującą postać wirtualnej prędkości referencyjnej:

$$\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_{vt}(\tau) \\ \dot{y}_{vt}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq -\eta \text{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \begin{bmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.53)$$

Wirtualne przyspieszenie referencyjne wynika bezpośrednio z różniczkowania (3.53):

$$\ddot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{x}_{vt}(\tau) \\ \ddot{y}_{vt}(\tau) \end{bmatrix} = -\eta \text{sgn}(e_{x0}) \frac{\mathbf{e}^{*T}(\tau) \dot{\mathbf{e}}^*(\tau)}{\|\mathbf{e}^*(\tau)\|} \begin{bmatrix} \cos \varphi_t \\ \sin \varphi_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.54)$$

W tym momencie możemy zaproponować postać pola $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^2$, a mianowicie:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \stackrel{(3.8)}{=} \begin{bmatrix} h_2(e_x, \mathbf{g}_{2t}^*) \\ h_3(e_y, \mathbf{g}_{2t}^*) \end{bmatrix} \triangleq k_p \mathbf{e}^*(\tau) + \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) = \begin{bmatrix} k_p e_x(\tau) + \dot{x}_{vt}(\tau) \\ k_p e_y(\tau) + \dot{y}_{vt}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.55)$$

gdzie $k_p > 0$ jest ponownie parametrem projektowym. Podstawiając (3.53) do definicji (3.55) otrzymuje się ostateczną postać pola zbieżności $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^2$ dla zadania stabilizacji w punkcie:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) = \begin{bmatrix} k_p e_x(\tau) - \eta \text{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \cos \varphi_t \\ k_p e_y(\tau) - \eta \text{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \sin \varphi_t \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Od tej chwili cała strategia VFO z podrozdziałów 3.1.1 oraz 3.1.2 pozostaje niezmienną. Jedynymi różnicami między sterownikami VFO dla zadania śledzenia i zadania stabilizacji są inne definicje znaku funkcji $k(\tau)$ oraz postać pola zbieżności \mathbf{h}^* (por. (3.52),(3.55) z (3.24),(3.25)). Postać pełnego pola zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ dla zadania stabilizacji jest następująca:

$$\mathbf{h}(e_a, \dot{\varphi}_a, \mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*) \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_a(\tau) + \dot{\varphi}_a(\tau) \\ k_p e_x(\tau) + \dot{x}_{vt}(\tau) \\ k_p e_y(\tau) + \dot{y}_{vt}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.53)}{=} \begin{bmatrix} k_1 e_a(\tau) + \dot{\varphi}_a(\tau) \\ k_p e_x(\tau) - \eta \text{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \cos \varphi_t \\ k_p e_y(\tau) - \eta \text{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \sin \varphi_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie ponownie sygnały $\varphi_a(\tau)$, $e_a(\tau)$ oraz $\dot{\varphi}_a(\tau)$ wynikają odpowiednio z (3.10), (3.11) oraz (3.13) dla przyjętych definicji (3.52) i (3.55). Widać wyraźnie, iż prędkość wirtualna $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^* = [\dot{x}_{vt} \ \dot{y}_{vt}]^T$ pełni rolę pomocniczą i oddziałuje jedynie w stanach przejściowych w podprzestrzeni stanu $\mathcal{Q}^* \subseteq \mathbb{R}^2$ – pozwala skierować sterowany system na punkt referencyjny w odpowiedni sposób, co zostanie zilustrowane wynikami symulacyjnymi w kolejnym punkcie.

STEROWNIK 2 Uwzględniając (3.56), sterownik VFO (3.12)-(3.17) dla zadania stabilizacji⁸ ma następującą postać (zakładając, że $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$):

$$u_1 \stackrel{(3.12)}{=} k_1(\varphi_a - \varphi) + \dot{\varphi}_a, \quad (3.57)$$

$$u_2 \stackrel{(3.17)}{=} (k_p e_x + \dot{x}_{vt}) \cos \varphi + (k_p e_y + \dot{y}_{vt}) \sin \varphi, \quad (3.58)$$

gdzie postać φ_a wynika z (3.10), (3.56) oraz (3.52):

$$\varphi_a \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}(e_{x0})(k_p e_y + \dot{y}_{vt}), \text{sgn}(e_{x0})(k_p e_x + \dot{x}_{vt})) \in \mathbb{R}, \quad (3.59)$$

postać $\dot{\varphi}_a$, na podstawie (3.13), (3.55), (3.51) oraz (3.47), wyraża się następującym wzorem:

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2 + h_3^2}, \quad (3.60)$$

w którym

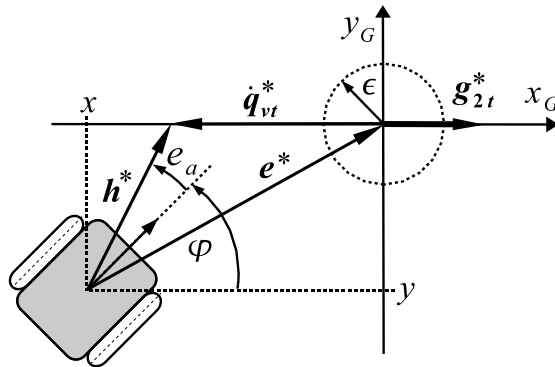
$$h_2 \stackrel{(3.25)}{=} k_p(x_t - x) + \dot{x}_{vt}, \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_2 = -k_p \dot{x} + \ddot{x}_{vt},$$

$$h_3 \stackrel{(3.25)}{=} k_p(y_t - y) + \dot{y}_{vt}, \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_3 = -k_p \dot{y} + \ddot{y}_{vt},$$

a wirtualne sygnały referencyjne $\dot{x}_{vt}, \dot{y}_{vt}$ oraz $\ddot{x}_{vt}, \ddot{y}_{vt}$ wynikają z (3.53)-(3.54).

♣

Geometryczną interpretację poszczególnych sygnałów wykorzystywanych podczas realizacji zadania stabilizacji metodą VFO przedstawia rys. 3.7.



Rys. 3.7: Dwukołowy robot mobilny podczas realizacji zadania stabilizacji metodą VFO (na rys. przyjęto: $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$, $k_p = 1$).

Twierdzenie 3.2 Dany jest stały punkt referencyjny (3.47) oraz obszar w dziedzinie błędów stabilizacji $\mathcal{E}^* \triangleq \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Zakładając, że:

$$\forall_{0 \leq \tau < \infty} \mathbf{e}^*(\tau) \in \mathcal{E}^* \quad (3.61)$$

⁸Inaczej: stabilizator VFO.

prawo sterowania VFO (3.57)-(3.58) zastosowane do systemu (3.1) globalnie asymptotycznie prawie stabilizuje⁹ błąd (3.48) w zbiorze \mathcal{E}_0 w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_x(\tau), e_y(\tau), e_\varphi(\tau) = 0$$

dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{E}^*$.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.1 rozważmy na początku zachowanie zmiennej orientującej φ i pomocniczego błędu orientacji e_a . Podstawienie (3.57) do (3.1) daje równanie

$$(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}) + k_1(\varphi_a - \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_a + k_1 e_a = 0,$$

z którego wynika, że błąd e_a zmierza wykładniczo do zera dla $\tau \rightarrow \infty$:

$$e_a(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_a(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \varphi_a(\tau). \quad (3.62)$$

Sterowanie orientujące (3.57) gwarantuje zatem spełnienie warunku orientowania (3.9).

Rozważmy zachowanie błędu pozycji e^* . Na podstawie (3.48) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = -\dot{q}^*. \quad (3.63)$$

Dodając i odejmując z prawej strony powyższego równania pole h^* z definicji (3.55) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = -\dot{q}^* + h^* - k_p e^* - \dot{q}_{vt}^*,$$

co po uporządkowaniu daje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{e}^* + k_p e^* = r - \dot{q}_{vt}^*, \quad \text{gdzie} \quad r \triangleq h^* - \dot{q}^*. \quad (3.64)$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.1 skorzystamy z następujących relacji (Dodatek B.1):

$$\|r\|^2 = \|h^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (3.65)$$

gdzie $\cos \alpha$ jest zdefiniowany w (3.16) oraz

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} (1 - \cos^2 \alpha(\varphi)) = 0. \quad (3.66)$$

Zaproponujmy teraz dodatnio określoną funkcję klasy \mathcal{K}_∞ :

$$V(e^*) \triangleq \frac{1}{2} e^{*T} e^* \in \mathcal{K}_\infty, \quad (3.67)$$

⁹Zgodnie z definicją 1.3. Zwrot *prawie asymptotycznie stabilizuje* jest tłumaczeniem wyrażenia *almost asymptotically stabilizes* zaczerpniętego z prac [KT02, Ast96].

której pochodną można oszacować następująco (dla prostoty użyta zostanie notacja $\gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(\varphi(\tau))} \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{e}^{*T} \dot{\mathbf{e}}^* \stackrel{(3.64)}{=} \mathbf{e}^{*T} [-k_p \mathbf{e}^* + \mathbf{r} - \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*] = \\
&\stackrel{(3.53)}{=} \mathbf{e}^{*T} [-k_p \mathbf{e}^* + \mathbf{r} - \delta(\mathbf{e}^*) \mathbf{g}_{2t}^*] = \\
&= -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \mathbf{e}^{*T} \mathbf{r} - \delta(\mathbf{e}^*) \mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* \leq \\
&\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{r}\| + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| = \\
&\stackrel{(3.49)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{r}\| + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| = \\
&\stackrel{(3.65)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{h}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| = \\
&\stackrel{(3.55)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|k_p \mathbf{e}^* + \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \leq \\
&\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| = \\
&\stackrel{(3.53)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| |\delta(\mathbf{e}^*)| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| = \\
&\stackrel{(3.51)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \eta \gamma \|\mathbf{e}^*\|^2 + \eta \|\mathbf{e}^*\|^2 = \\
&= -[k_p(1 - \gamma) - \eta(1 + \gamma)] \|\mathbf{e}^*\|^2 = -\zeta(\gamma(\tau)) \|\mathbf{e}^*\|^2.
\end{aligned}$$

Powyższa pochodna jest określona ujemnie, gdy $\zeta(\gamma(\tau))$ jest określone dodatnio, co pozwala zapisać warunek asymptotycznej zbieżności błędu \mathbf{e}^* :

$$\zeta(\gamma(\tau)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\tau) < \frac{k_p - \eta}{k_p + \eta}. \quad (3.68)$$

Z uwagi na (3.51), (3.66) oraz (3.62) wnioskuje się, że:

$$\exists \tau_\gamma < \infty : \forall \tau \geq \tau_\gamma \quad \gamma(\tau) < \frac{k_p - \eta}{k_p + \eta} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{e}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = 0. \quad (3.69)$$

Dodatkowo dla $\tau \geq \tau_\gamma$ zbieżność $\|\mathbf{e}^*(\tau)\|$ do zera ma charakter wykładniczy, ponieważ:

$$\forall \tau \geq \tau_\gamma \quad \left\{ \dot{V}(\tau) \leq -2\zeta V(\tau) \Rightarrow V(\tau) \leq V_0 \exp(-2\zeta\tau) \Rightarrow \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \|\mathbf{e}^*(0)\| \exp(-2\zeta\tau) \right\}.$$

Pozostaje teraz pokazać, że także błąd orientacji platformy robota e_φ zmierza do zera. W tym celu przeanalizujemy zachowanie się zmiennej φ w przypadku, gdy $e_a \rightarrow 0$, a pozycja robota zbiega w otoczenie punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t^* = [x_t \ y_t]^T$, czyli dla $e_x, e_y \rightarrow 0$.

Można pomocniczo wykazać, że prawdziwe są następujące relacje (Dodatek B.1):

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \begin{cases} \dot{x}(\varphi) = h_2, \\ \dot{y}(\varphi) = h_3. \end{cases} \quad \stackrel{(3.63)}{\implies} \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \begin{cases} \dot{e}_x(\varphi) = -h_2, \\ \dot{e}_y(\varphi) = -h_3. \end{cases} \quad (3.70)$$

Z modelu (3.1) wynika także, iż tangens kąta orientacji platformy robota określony jest ilorazem odpowiednich prędkości: $\tan \varphi = \dot{y}/\dot{x}$. Korzystając teraz z (3.70) oraz z ogólnej postaci pola zbieżności (3.55) możemy zapisać co następuje:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \tan \varphi \stackrel{(3.70)}{=} \frac{h_3}{h_2} \stackrel{(3.55)}{=} \frac{k_p e_y - \eta \operatorname{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*\| \sin \varphi_t}{k_p e_x - \eta \operatorname{sgn}(e_{x0}) \|\mathbf{e}^*\| \cos \varphi_t} = \frac{\nu \frac{e_y}{\|\mathbf{e}^*\|} + \sin \varphi_t}{\nu \frac{e_x}{\|\mathbf{e}^*\|} + \cos \varphi_t},$$

gdzie $\nu \triangleq -\frac{k_p}{\eta \operatorname{sgn}(e_{x0})}$. W otoczeniu punktu stabilizacji $\mathbf{q}_t^* = [x_t \ y_t]^T$ czyli w granicy dla $\lim_{e_x, e_y \rightarrow 0}$ powyższa relacja ma postać:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a, e_x, e_y \rightarrow 0} \tan \varphi = \frac{\sin \varphi_t}{\cos \varphi_t} \Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a, e_x, e_y \rightarrow 0} \tan \varphi = \tan \varphi_t.$$

Uzyskany wynik nie gwarantuje jeszcze, że $\varphi \rightarrow \varphi_t$, bowiem powyższa relacja jest słuszna także, gdy $\varphi = \varphi_t \pm \pi$. Aby ostatecznie udowodnić zbieżność zmiennej φ do wartości referencyjnej φ_t , wystarczy dodatkowo pokazać, że w granicy dla $\varphi \rightarrow \varphi_a, e_x, e_y \rightarrow 0$ spełniona jest nierówność $\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* > 0$, co w sposób oczywisty determinuje zgodność orientacji robota z orientacją referencyjną. Spełnienie nierówności wykazano w dodatku B.1. Ostatecznie zatem w otoczeniu punktu $\mathbf{q}_t^* = [x_t \ y_t]^T$ orientacja platformy robota $\varphi(\tau)$ asymptotycznie zmierza do wartości referencyjnej φ_t . Tym samym błąd stabilizacji $e_\varphi(\tau)$ asymptotycznie zmierza do zera:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 0. \quad (3.71)$$

Z (3.56) i (3.69) wynika, że: $\|\mathbf{h}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^*(\tau)\| = 0$. Zatem z (3.58) (lub z (3.15)) wynika, że: $u_2(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\|\mathbf{e}^*\| \rightarrow 0} u_2(\mathbf{e}^*(\tau)) = 0$. Z założenia (3.61) oraz z wniosku, że $\|\dot{\mathbf{e}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ wynika, iż $\forall \mathbf{e}^* \neq \mathbf{0} \dot{\varphi}_a(\mathbf{e}^*(\tau)) \in \mathcal{L}_\infty$. Uwzględnienie teraz wniosków (3.62) i (3.71) wraz z definicją (3.57) implikuje: $u_1(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. \square

Uwaga 3.7 Definicje (3.59) oraz (3.60) nie są określone jedynie w punkcie $\mathbf{e}^* = \mathbf{0} \Rightarrow e_x, e_y = 0$. Spełnienie założenia $\|\mathbf{e}^*(0)\| \neq 0$ oraz warunku zbieżności z (3.69) gwarantuje, iż punkt $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$ nie zostanie osiągnięty w skończonym czasie. Zatem w takim przypadku nie ma potrzeby wprowadzania dodatkowej definicji sygnałów $\varphi_a, \dot{\varphi}_a$ w tym punkcie [Ast96, ACBB95]. Założenie $\|\mathbf{e}^*(0)\| \neq 0$ nie powoduje utraty ogólności rozważań, gdyż zawsze istnieje pewne sterowanie w torze otwartym, np. $u_1 = 0, u_2 = \text{const}$, które wyprowadza system (3.1) w skończonym czasie z punktu $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$. Natomiast spełnienie warunku zbieżności z (3.69) wynika z efektywności procesu orientowania pola \mathbf{g}_2^* (im szybciej $e_a(\tau)$ zmierza do zera, tym szybciej $\gamma(\tau)$ zmierza do zera i tym szybciej spełniony będzie warunek w (3.69)). Aby zatem zagwarantować wykładniczy charakter ewolucji błędu \mathbf{e}^* , można zastosować następującą prostą dwuetapową strategię sterowania:

- E1. dla $\tau \in [0, \tau_\gamma]$ przyjmij $u_2 \equiv 0$ i zastosuj sterowanie orientujące (3.57) aż do osiągnięcia przez $\gamma(\tau)$ wartości mniejszej od $\frac{k_p - \eta}{k_p + \eta}$; w tym etapie zachodzi: $\forall \tau \leq \tau_\gamma \ \mathbf{e}^*(\tau) \equiv \mathbf{e}^*(0)$,
- E2. dla $\tau \in (\tau_\gamma, \infty)$ zastosuj pełny sterownik VFO (3.57)-(3.58); w tym etapie zachodzi: $\forall \tau > \tau_\gamma \ \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \|\mathbf{e}^*(0)\| \exp(-2\zeta\tau)$.

Stabilizator VFO, który nie posiada dodatkowych definicji dla $\varphi_a, \dot{\varphi}_a$ w punkcie stabilizacji $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$ i nie jest w tym punkcie zdefiniowany¹⁰ należy do klasy tzw. prawie stabilizatorów (por. def. 1.3 oraz [Ast96, KT02]). Zapewnia on, iż wszystkie trajektorie błędu $\mathbf{e}(\tau)$ takie, że $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ zbiegają asymptotycznie do zera. Warto zauważyć, że tak zdefiniowany sterownik VFO jest ciągły w dziedzinie czasu¹¹. Co więcej, jest on także

¹⁰Punkt stabilizacji nie jest punktem równowagi układu zamkniętego.

¹¹Tzn., że $u_1(\tau), u_2(\tau)$ są w dziedzinie τ przynajmniej klasy C^1 .

różniczkowalny wszędzie poza punktem $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$. Potencjalna nieciągłość występuje zatem jedynie w dziedzinie błędu \mathbf{e} , która jednak teoretycznie nigdy nie wystąpi.

Przedstawimy teraz pewną modyfikację, która pozwoli na dobre zdefiniowanie stabilizatora VFO w całej dziedzinie błędu $\mathbf{e}^* \in \mathbb{R}^2$. Wprowadźmy następujące dodatkowe definicje sygnałów $\varphi_a, \dot{\varphi}_a$:

$$\varphi_a(\tau) = \varphi_a \stackrel{\Delta}{=} \varphi_t, \quad (3.72)$$

$$\dot{\varphi}_a(\tau) = \dot{\varphi}_a \stackrel{\Delta}{=} \dot{\varphi}_t \stackrel{(3.47)}{=} 0. \quad (3.73)$$

Modyfikacja stabilizatora (3.57)-(3.58) mająca na celu dobre zdefiniowanie sterownika VFO w całej dziedzinie błędu $\mathbf{e}^* \in \mathbb{R}^2$, wynika teraz z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.3 *Dany jest stały punkt referencyjny (3.47). Odcinkami ciągle prawo sterowania VFO (3.57)-(3.58), w którym:*

$$\varphi_a(\tau), \dot{\varphi}_a(\tau), u_2(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} (3.59), (3.60), (3.58) & \text{dla } \|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \epsilon, \\ (3.72), (3.73), 0 & \text{dla } \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (3.74)$$

gdzie $\epsilon \geq 0$ jest założonym otoczeniem punktu $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$, zastosowane do systemu (3.1) zapewnia globalną stabilizację błędu (3.48) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon$$

dla dowolnego ograniczonego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$. Dla $\epsilon = 0$ stabilizacja ma charakter asymptotyczny, a dla $\epsilon > 0$ – praktyczny (por. def. 1.1 oraz 1.2).

Dowód. Przyjmując $\epsilon = 0$ wszystkie wnioski z twierdzenia 3.2 pozostają w mocy z tym, że dodatkowo dla $\|\mathbf{e}^*\| = 0$ otrzymujemy:

$$\varphi_a \stackrel{(3.74)}{=} \varphi_t, \quad \dot{\varphi}_a \stackrel{(3.74)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \stackrel{(3.74, 3.57)}{=} k_1(\varphi_t - \varphi).$$

Po podstawieniu powyższej zależności do (3.1) mamy:

$$\dot{\varphi} + k_1\varphi = k_1\varphi_t \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \varphi_t \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 0.$$

Dla $\epsilon > 0$ rozważymy dwa przypadki: $\|\mathbf{e}^*(0)\| > \epsilon$ oraz $\|\mathbf{e}^*(0)\| \leq \epsilon$. Gdy $\|\mathbf{e}^*(0)\| > \epsilon$, wówczas korzystając z twierdzenia 3.2 możemy zapisać:

$$\exists_{\tau_\epsilon < \infty} : \|\mathbf{e}^*(\tau_\epsilon)\| = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \forall_{\tau \geq \tau_\epsilon} \quad u_2(\tau) = 0, \quad u_1(\tau) = k_1(\varphi_t - \varphi(\tau)),$$

zatem z modelu (3.1) oraz definicji (3.47) bezpośrednio wynika, że

$$\forall_{\tau \geq \tau_\epsilon} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = \epsilon \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| = \epsilon.$$

Z kolei, gdy $\|\mathbf{e}^*(0)\| \leq \epsilon$ wówczas $\tau_\epsilon = 0$ oraz:

$$\forall_{\tau \geq 0} \quad u_2(\tau) = 0, \quad u_1(\tau) = k_1(\varphi_t - \varphi(\tau))$$

i podobnie jak w poprzednim przypadku możemy stwierdzić co następuje:

$$\forall_{\tau \geq 0} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_\varphi(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon.$$

□

Zauważmy, że postać sterowania orientującego (3.57) pomimo modyfikacji (3.74) jest nadal aktualna z tą jedynie różnicą, że sygnały $\varphi_a, \dot{\varphi}_a$ w niej zawarte mają generalnie charakter nieciągły (są ciągłe w sensie C^0).

3.1.4 Wyniki badań symulacyjnych

Jakość działania sterownika VFO ilustrują przedstawione niżej wyniki symulacji numerycznych. Wszystkie obliczenia przeprowadzono dla zmiennego kroku całkowania metodą *ODE45* (*Dormand-Prince*) w horyzoncie czasowym $\tau \in [0, T]$, $T = 5[s]$. Podczas wszystkich symulacji, sygnały prędkości \dot{x}, \dot{y} sterowanego systemu występujące w definicjach (3.31) oraz (3.60) były obliczane na podstawie równania (3.1).

I. Śledzenie trajektorii. Zadanie śledzenia trajektorii zmiennych w czasie rozważono dla dwóch przypadków: 1) trajektorii typu T1 (popychającej) oraz 2) trajektorii typu T3 (popychająco-orientującej). Obie trajektorie były obliczane zgodnie z definicją (3.18) i spełniały warunek ustawicznego pobudzenia.

Trajektoria typu T1. Przeprowadzono symulacje dla dwóch przypadków: bez przechodzenia przez punkty nieciągłości $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ (sterownik (3.28)-(3.29)) oraz z przechodzeniem przez punkty nieciągłości $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ (sterownik (3.28)-(3.29) z modyfikacją według propozycji 3.2).

Jako pierwszy zostanie omówiony przypadek, w którym system sterowany nie przechodzi przez punkty $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$, zatem sterowanie VFO ma charakter ciągły i różniczkowalny w całym horyzoncie czasowym sterowania. Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2\tau - 1.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) \triangleq \begin{bmatrix} \pi/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

gdzie u_{2t} wyrażone jest w $[m/s]$, a $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ w $[rad]$ i $[m]$. Tak zdefiniowana trajektoria referencyjna jest typu popychającego i zgodnie z interpretacją geometryczną definiuje ruch robota po linii prostej w \mathbb{R}^2 (tu: ze zmiennym sterowaniem popychającym u_{2t}). Przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5$, $k_1 = 10$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.8-3.12. Ścieżka referencyjna oraz wynikowa ścieżka sterowanego robota pokazana została na rys. 3.13, gdzie krótkimi prostymi odcinkami zaznaczono chwilowe orientacje platformy pojazdu¹². Na uwagę zasługuje szybka i nieoscylacyjna zbieżność błędów śledzenia do zera¹³, efektywność procesu orientowania pola \mathbf{g}_2^* (przebieg błędu e_a oraz $\cos \alpha$) oraz naturalny ruch robota w przestrzeni zadania (rys. 3.13). Zadana trajektoria referencyjna wymaga w tym przypadku strategii ruchu *do tyłu*. Strategia ta jest realizowana już w stanie przejściowym, co pozwala na gładki

¹²Odcinki zostały wykreślone z kwantem czasu 0.05[s] i pozwalają na przeanalizowanie czasowej parametryzacji ścieżki.

¹³Ścisłe rzecz biorąc, dla błędu orientacji zachodzi tutaj: $e_\varphi(\tau) \rightarrow 2\pi$.

wjazd robota na ścieżkę referencyjną (nawrót pojazdu pokazano na rys. 3.13). O rodzaju realizowanej strategii ruchu świadczy też fakt, iż $\cos \alpha \rightarrow -1$ w trakcie procesu sterowania (rys. 3.9). Rysunek 3.12 przedstawia przebiegi błędów śledzenia (w sensie wartości bezwzględnej) w skali logarytmicznej, aby pokazać przybliżoną szybkość zbieżności, szczególnie dla błędów e_x oraz e_y .

Aby przedstawić jakość działania odcinkami ciągłego sterownika VFO oraz by potwierdzić wnioski dotyczące zbieżności zawarte w propozycji 3.2, przeprowadzono symulacje dla przypadku, gdzie w stanie przejściowym występuje zjawisko przechodzenia systemu przez punkt nieciągłości $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$. W tym celu wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) \triangleq \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

gdzie u_{2t} wyrażone jest w $[m/s]$, a $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ w $[rad]$ i $[m]$. Zdefiniowana trajektoria referencyjna jest typu popychającego i zgodnie z interpretacją geometryczną definiuje ruch robota po linii prostej w \mathbb{R}^2 (tu: ze stałym sterowaniem popychającym u_{2t}). Przyjęto następujące wartości współczynników projektowych: $k_p = 5$, $k_1 = 10$. Zastosowany sterownik VFO wynika z treści propozycji 3.2, dla której przyjęto $\epsilon = 0.1$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.15-3.19, z których wynika, że po opuszczeniu założonego otoczenia punktu $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ system asymptotycznie zbiega do trajektorii referencyjnej przy zachowaniu ograniczonych sygnałów sterujących. Warto zauważyć, iż punkt nieciągłości pojawia się tylko raz w stanie przejściowym i nie jest on przyciągający. Ścieżka referencyjna oraz wynikowa ścieżka sterowanego robota pokazana została na rys. 3.20 (krótkimi prostymi odcinkami zaznaczono chwilowe orientacje platformy pojazdu¹⁴, a rys. 3.21 ukazuje zbliżenie procesu nawrotu robota po wyjściu z otoczenia ϵ punktu $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$.

Trajektoria typu T3. Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sin 2\tau + 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

gdzie u_{1t} wyrażone jest w $[rad/s]$, u_{2t} w $[m/s]$, a $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ w $[rad]$ i $[m]$. Tak zdefiniowana trajektoria referencyjna jest typu popychająco-orientującego i zgodnie z interpretacją geometryczną definiuje ruch robota po pewnych krzywych w \mathbb{R}^2 (tu: ze stałym lecz niezerowym sterowaniem popychającym u_{2t} i zmiennym sterowaniem orientującym u_{1t}). Przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5$, $k_1 = 10$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.22-3.26. Ścieżka referencyjna oraz wynikowa ścieżka sterowanego robota pokazana została na rys. 3.14, gdzie krótkimi prostymi odcinkami zaznaczono chwilowe orientacje platformy pojazdu¹⁵. Również w tym

¹⁴Odcinki zostały wykreślone z kwantem czasu 0.05[s].

¹⁵Odcinki zostały wykreślone z kwantem czasu 0.05[s].

Tab. 3.1: Wartości wskaźników jakości J_1, J_2 dla trzech wybranych wartości współczynnika k_p (przy ustalonym k_1) dla zadania śledzenia.

k_1	k_p	J_1	J_2
10	10	1.836	60.74
10	5	2.238	31.52
10	1	4.490	12.77

Tab. 3.2: Wartości wskaźników jakości J_1, J_2 dla trzech wybranych wartości współczynnika k_1 (przy ustalonym k_p) dla zadania śledzenia.

k_1	k_p	J_1	J_2
20	5	1.883	42.02
10	5	2.238	31.52
1	5	6.375	48.31

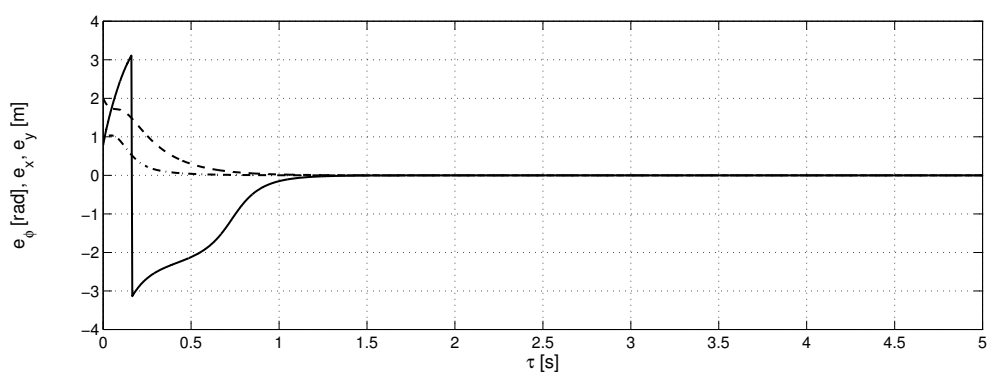
przypadku stany przejściowe sygnałów błędów (rys. 3.22,3.26) oraz postać ścieżki robota w przestrzeni zadania (rys. 3.14) nie wykazują oscylacji i świadczą o szybkim i gładkim wjeździe pojazdu na trajektorię referencyjną. Tym razem trajektoria referencyjna wymaga strategii ruchu *do przodu*, którą robot realizuje także już w etapie przejściowym ($\cos \alpha \rightarrow +1$).

Dla obu typów trajektorii referencyjnych T1 i T3 uzyskano ograniczone przebiegi sygnałów sterujących (rys. 3.11, 3.18 oraz 3.25) zbiegające w granicy do odpowiednich sterowań referencyjnych.

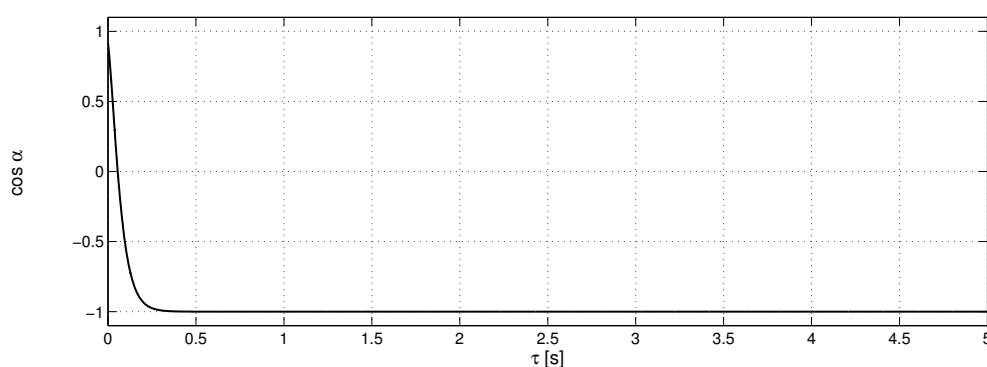
Na rys. 3.27 i 3.28 przedstawiono wpływ wartości obu nastaw k_p, k_1 sterownika VFO na jakość stanów przejściowych w przestrzeni zadania robota dla przypadku śledzenia trajektorii prostoliniowej ($u_{1t} = 0, u_{2t} = 0.5[m/s]$) rozpoczynającej się w punkcie $\mathbf{q}_t(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Jakościowy wpływ poszczególnych współczynników jest w zasadzie intuicyjny i wynika z prostej analizy równań (3.34) oraz (3.33). Wpływ ilościowy dotyczący zbieżności błędów śledzenia oraz kosztu sterowania ukazują wartości następujących wskaźników jakości:

$$J_1 \triangleq \int_0^T (e_\varphi^2(\tau) + e_x^2(\tau) + e_y^2(\tau))d\tau, \quad J_2 \triangleq \int_0^T (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau))d\tau, \quad (3.75)$$

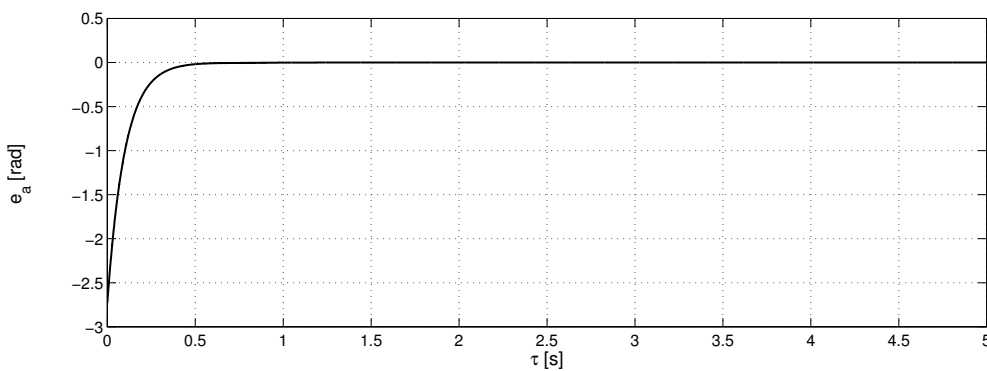
które zostały obliczone (tabele 3.1 oraz 3.2) dla wybranych wartości współczynników k_p oraz k_1 (podczas obliczeń wskaźnika J_1 , wartości błędu e_φ zostały ograniczone do przedziału $[-\pi, \pi]$). Warto zwrócić uwagę na kluczowe znaczenie wartości współczynnika k_1 (tab. 3.2) z punktu widzenia szybkości zbieżności błędów śledzenia (wskaźnik J_1). Zwiększanie wartości k_1 prowadzi do zwiększenia efektywności procesu orientowania, a tym samym do szybszego wjazdu robota na trajektorię referencyjną (por. rys. 3.28). Jednak zbyt duża wartość tego współczynnika może powodować niepotrzebne zwiększenie kosztu sterowania (J_2) przy stosunkowo niewielkiej dalszej poprawie jakości zbieżności (przypadek dla $k_1 = 20$). Takie zjawisko sugeruje możliwość występowania optymalnych nastaw k_{1OPT}, k_{pOPT} ze względu na wskaźnik $J = J_1 + J_2$ znany z teorii układów liniowych. Ten problem jednak wykracza poza zakres niniejszej pracy. Dodajmy jeszcze, iż dobór wartości k_p i k_1 podczas przeprowadzania symulacji nie stwarzał żadnych problemów, był bardzo prosty, intuicyjny i nie zależał ani od warunków początkowych ani od typu rozważanej trajektorii referencyjnej. Fakt ten stanowi istotną cechę wszystkich proponowanych w tej pracy sterowników VFO.



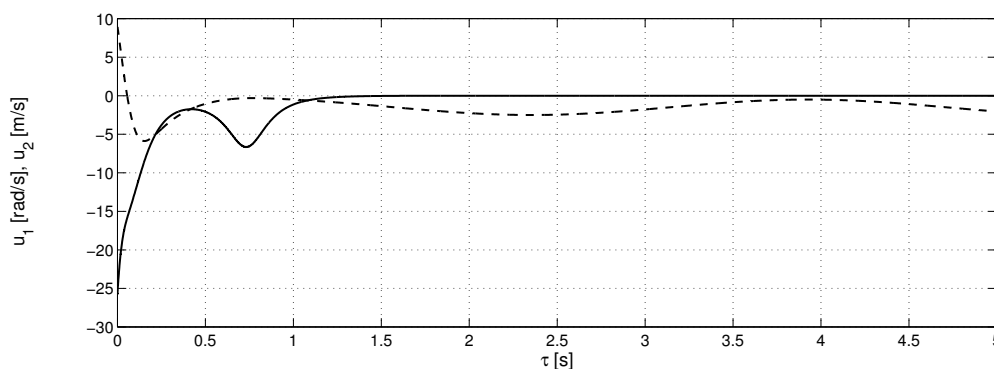
Rys. 3.8: Σ_{UMR} : trajektoria T1 – błędy śledzenia: e_φ (–) (ograniczone do zakresu $[-\pi, \pi]$), e_x (– –), e_y (– · –).



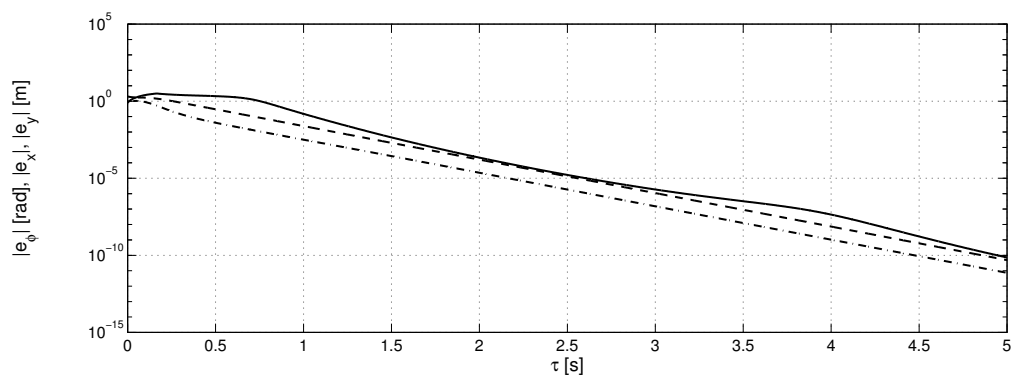
Rys. 3.9: Σ_{UMR} : trajektoria T1 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



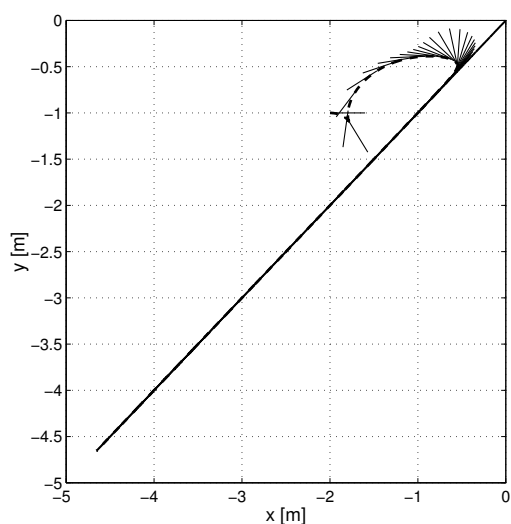
Rys. 3.10: Σ_{UMR} : trajektoria T1 – pomocniczy błąd orientacji e_a .



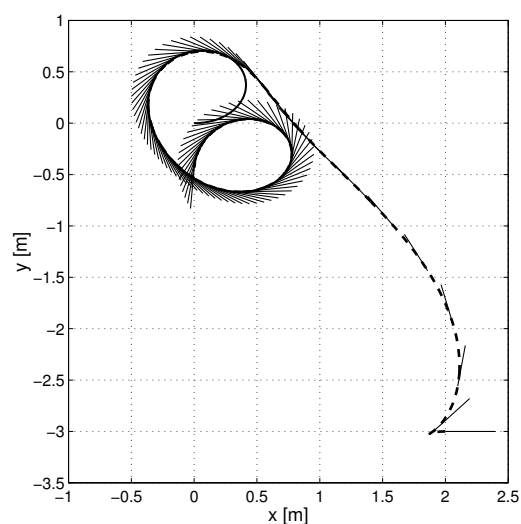
Rys. 3.11: Σ_{UMR} : trajektoria T1 – sygnały sterujące: u_1 (–), u_2 (– –).



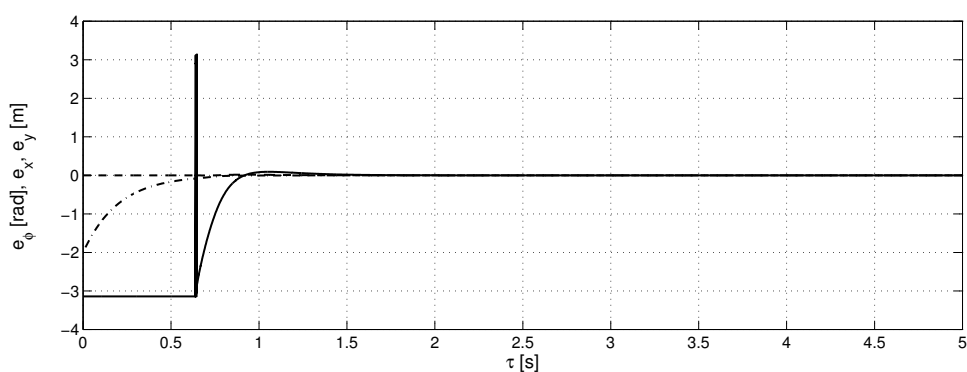
Rys. 3.12: Σ_{UMR} : trajektoria T1 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_\varphi|$ (—), $|e_x|$ (---), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej (błąd e_φ ograniczono do zakresu $[-\pi, \pi]$).



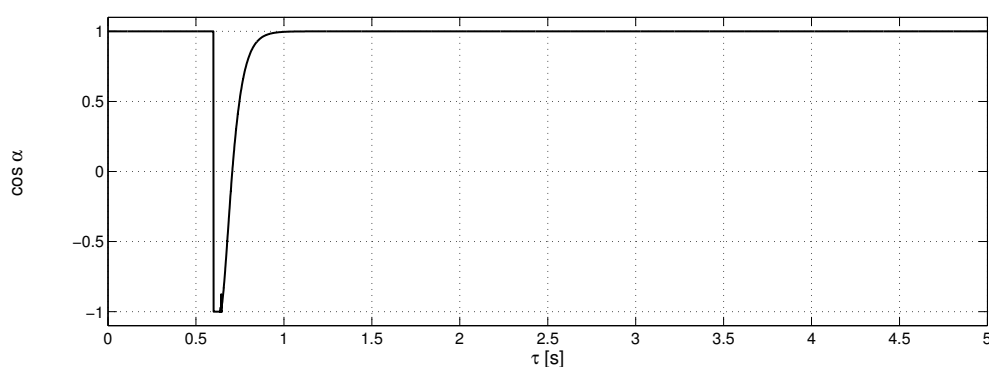
Rys. 3.13: Σ_{UMR} : trajektoria T1 – ścieżka robota (linia przerywana) i ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni zadania. Krótkimi odcinkami zaznaczono chwilowe orientacje platformy robota.



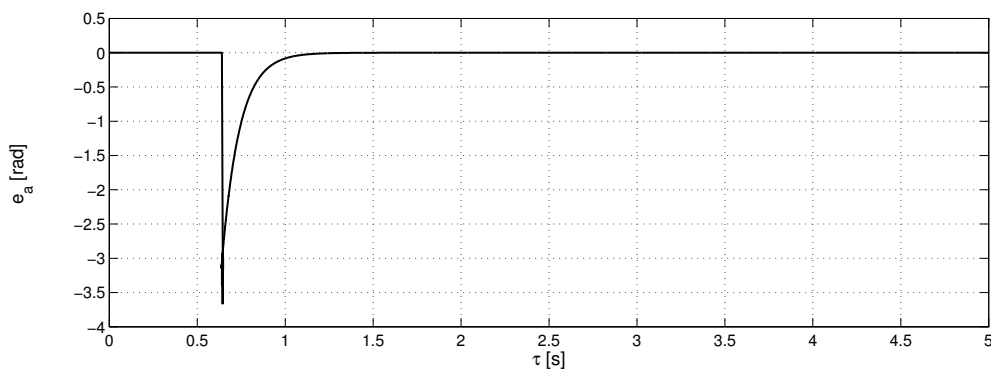
Rys. 3.14: Σ_{UMR} : trajektoria T3 – ścieżka robota (linia przerywana) i ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni zadania. Krótkimi odcinkami zaznaczono chwilowe orientacje platformy robota.



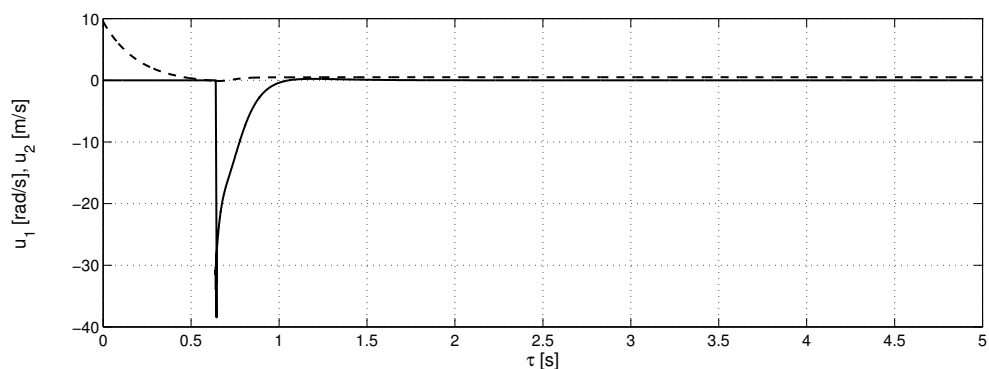
Rys. 3.15: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – błędy śledzenia: e_ϕ (-) (ograniczone do zakresu $[-\pi, \pi]$), e_x (- -), e_y (-.-).



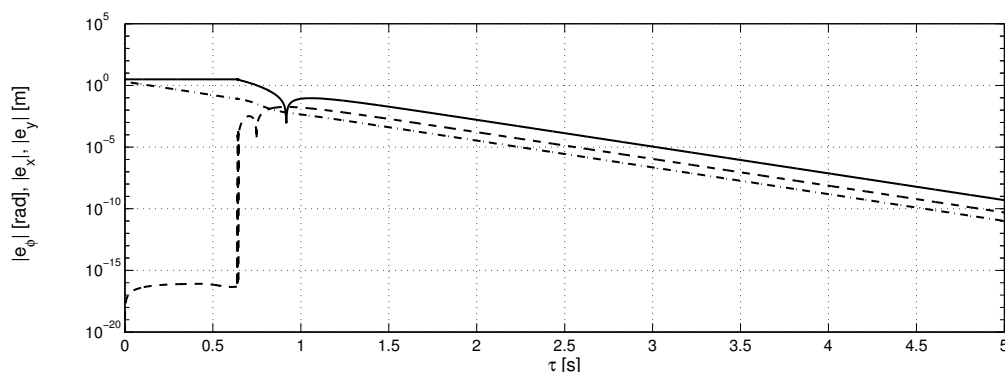
Rys. 3.16: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – efektywność orientowania pola \mathbf{g}_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(\mathbf{g}_2^*, \mathbf{h}^*)$.



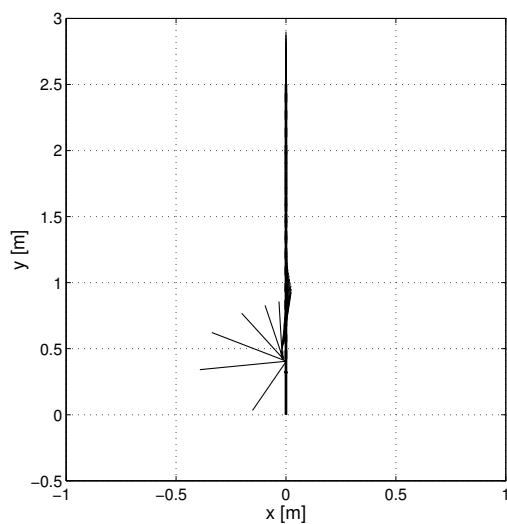
Rys. 3.17: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – pomocniczy błąd orientacji e_a .



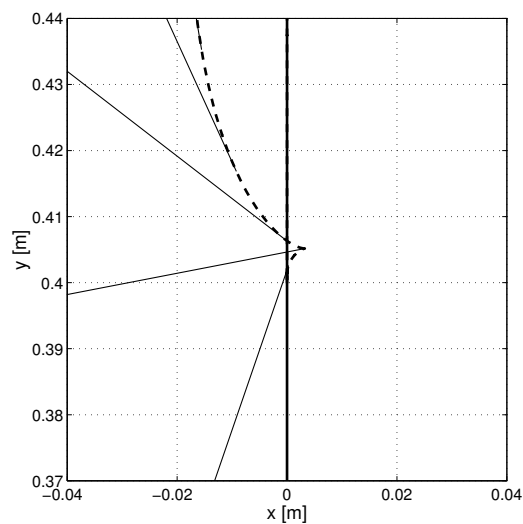
Rys. 3.18: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



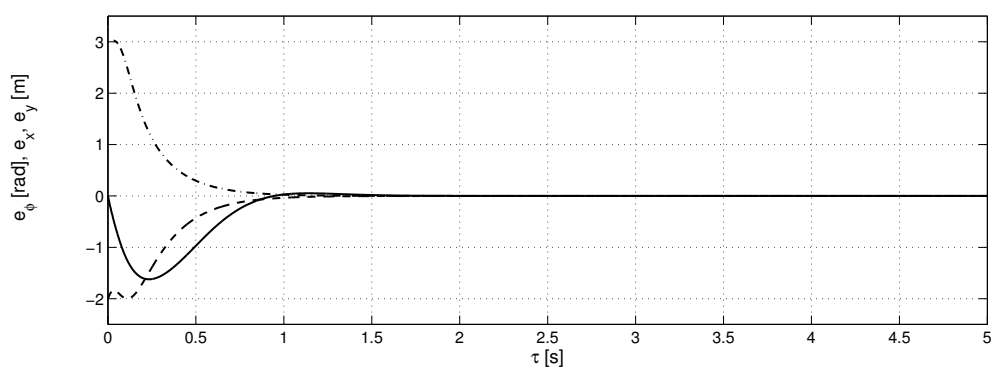
Rys. 3.19: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_\phi|$ (-), $|e_x|$ (- -), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej (błąd e_ϕ ograniczono do zakresu $[-\pi, \pi]$).



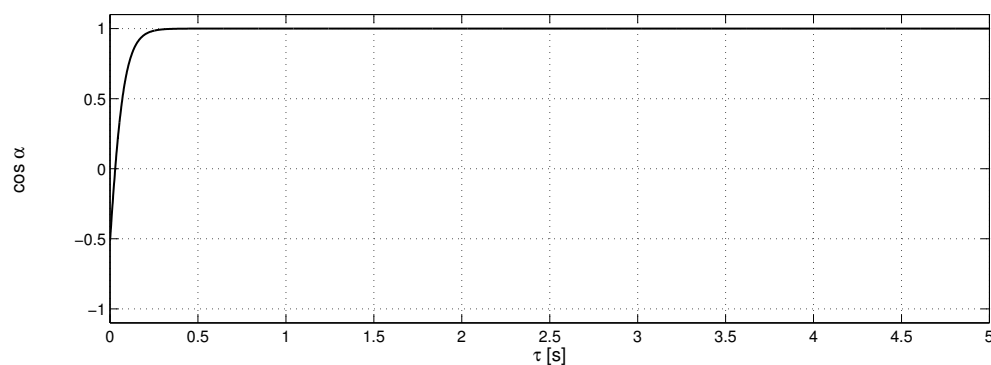
Rys. 3.20: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – ścieżka robota (linia przerywana) i ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni zadania. Krótkimi odcinkami zaznaczono chwilowe orientacje platformy robota.



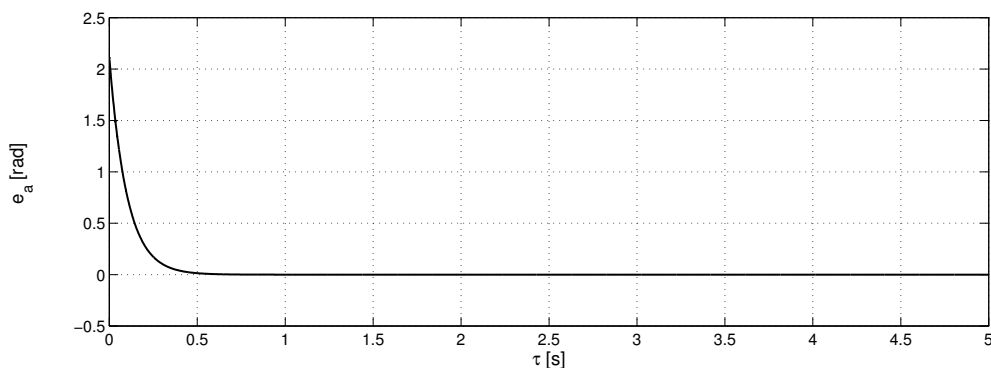
Rys. 3.21: Σ_{UMR} : trajektoria T1 z przejściem przez punkt $\mathbf{h}^* = \mathbf{0}$ – zbliżenie procesu nawrotu robota po opuszczeniu otoczenia ϵ punktu nieciągłości; ścieżka robota (linia przerywana) i ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni zadania.



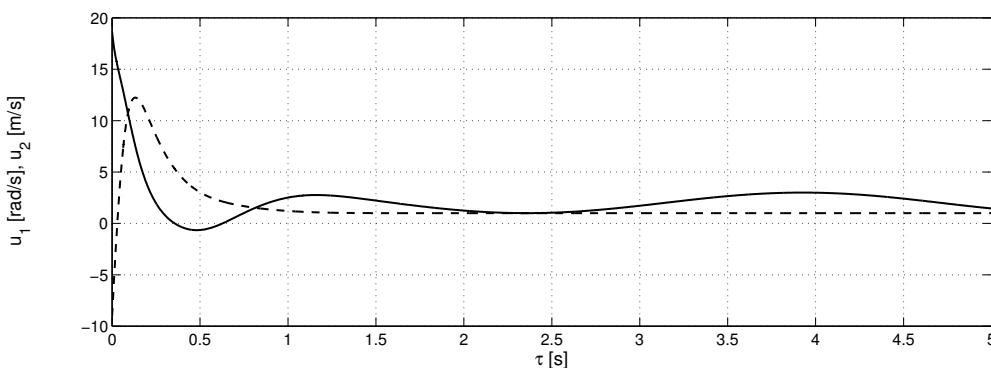
Rys. 3.22: Σ_{UMR} : trajektoria T3 – błędy śledzenia: e_φ (-), e_x (- -), e_y (-.-).



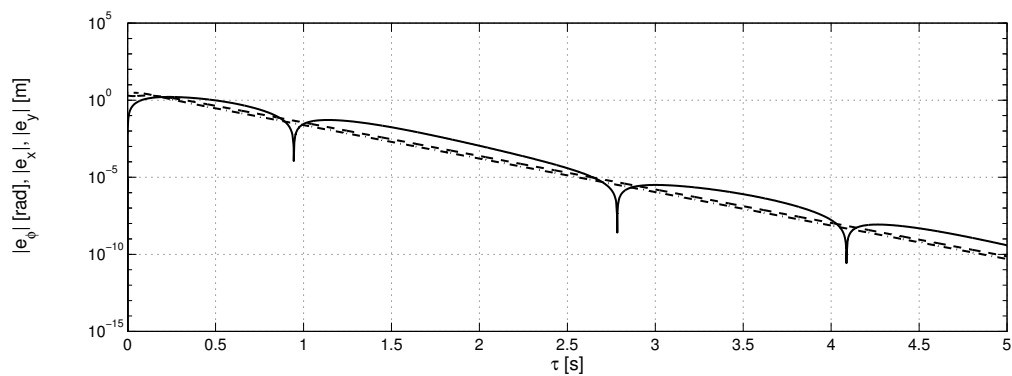
Rys. 3.23: Σ_{UMR} : trajektoria T3 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



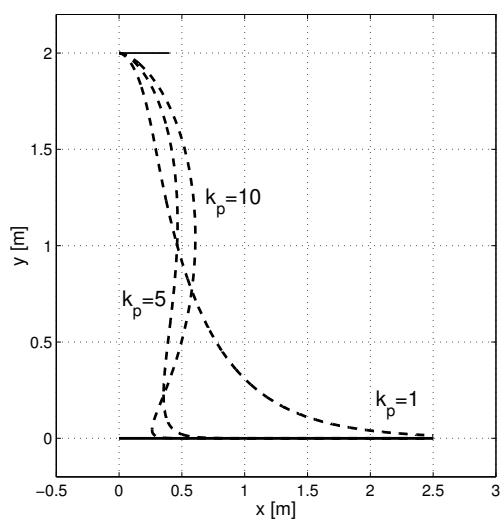
Rys. 3.24: Σ_{UMR} : trajektoria T3 – pomocniczy błąd orientacji e_a .



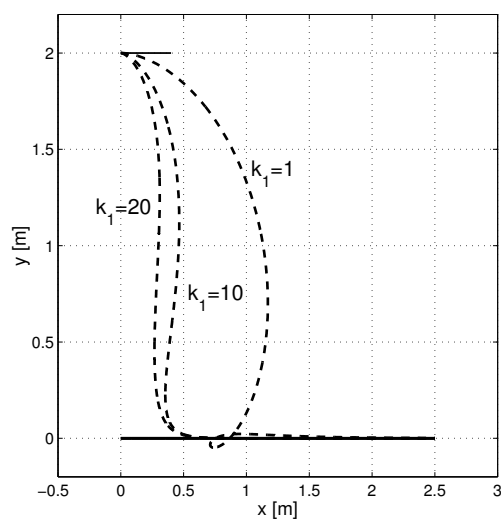
Rys. 3.25: Σ_{UMR} : trajektoria T3 – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



Rys. 3.26: Σ_{UMR} : trajektoria T3 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_\phi|$ (—), $|e_x|$ (---), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



Rys. 3.27: Σ_{UMR} : wpływ wartości współczynnika k_p na jakość procesów przejściowych dla zadania śledzenia trajektorii typu T1 (przyjęto: $k_1 = 10$).



Rys. 3.28: Σ_{UMR} : wpływ wartości współczynnika k_i na jakość procesów przejściowych dla zadania śledzenia trajektorii typu T1 (przyjęto: $k_p = 5$).

II. Stabilizacja w punkcie. Zadanie stabilizacji w punkcie lub inaczej zadanie śledzenia trajektorii (3.18) zdegenerowanej do stałego punktu referencyjnego (typ trajektorii T4) zrealizowano wykorzystując sterownik (3.57)-(3.58) jako tzw. *prawie stabilizator* (bez dodatkowych definicji w punkcie $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$).

Trajektoria typu T4 (stały punkt referencyjny). Aby pokazać uniwersalność stabilizatora (3.57)-(3.58), symulacje przeprowadzono dla dwóch różnych stałych punktów referencyjnych: zerowego i niezerowego. W pierwszym przypadku wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) = \mathbf{q}_t \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ wyrażone są w $[rad]$ i $[m]$. Tak zdefiniowana trajektoria $\mathbf{q}_t(\tau)$ ma postać stałego punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t \in \mathbb{R}^3$. Wybrane warunki początkowe $\mathbf{q}(0)$ determinują w tym przypadku zadanie nazywane parkowaniem równoległym. Zadanie takie stanowi najtrudniejszy problem stabilizacji, gdyż wymaga efektywnego ruchu w kierunku zabronionym przez ograniczenia nieholonomiczne¹⁶ [KT02]. Podczas symulacji przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5, k_1 = 10, \eta = 3$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiono na rys. 3.29-3.33, a wynikową ścieżkę robota w przestrzeni zadania¹⁷ na rys. 3.34. Podobnie jak w zadaniach śledzenia, zbieżność błędów stabilizacji jest szybka i nieoscylacyjna, a ruch robota ma naturalny charakter. Co więcej, cała ścieżka robota zewiera się w stosunkowo wąskim pasie w \mathbb{R}^2 , co ma praktyczne znaczenie, gdy ruch odbywa się w środowisku z przeszkodami. Efektywność procesu orientowania pola \mathbf{g}_2^* ilustrują przebiegi błędu e_a oraz $\cos \alpha$. Wykładnicza zbieżność błędów e_x oraz e_y do zera następuje już po około 0.2[s] czasu symulacji (po spełnieniu warunku z (3.69), który w tym przypadku wynosi: $\gamma < 0.25 \Rightarrow \cos \alpha > 0.968$) – rys. 3.33. Szybszą zbieżność błędu e_y (w porównaniu przebiegiem błędu e_x), ilustruje w skali logarytmicznej rys. 3.33. Z wykresu tego widać także wpływ dodatkowego współczynnika η , który powoduje, iż orientacja platformy robota zbiega do wartości referencyjnej jeszcze przed osiągnięciem punktu $e_x = 0$ – końcowy etap ruchu robota odbywa się w przybliżeniu wzdłuż odcinka prostoliniowego. Efekt ten można nazwać *naprowadzaniem* robota na punkt \mathbf{q}_t^* , który może być przydatny np. w zadaniu parkowania w garażu czy wewnątrz. Należy pamiętać jednak, że skutkiem powiększania wartości η jest wydłużanie czasu τ_γ z warunku (3.69) i w konsekwencji zmniejszanie szybkości zbieżności dla normy $\|\mathbf{e}^*\|$ (biorąc pod uwagę cały horyzont czasowy sterowania). Nieoscylacyjny przebieg ograniczonych sygnałów sterujących zbiegających w granicy do zera przedstawia rys. 3.32.

Aby zilustrować jakość stanów przejściowych w zadaniu stabilizacji dla zerowego punktu referencyjnego i dla różnych warunków początkowych, wykreślono zestaw ścieżek robota uzyskany dla ośmiu wybranych pozycji początkowych platformy $x(0), y(0)$ położonych na okręgu o promieniu $R = 3$ z orientacją początkową $\varphi(0) = \pi/2$ (rys. 3.35).

¹⁶W sensie wartości średniej w horyzoncie czasowym sterowania [KT02].

¹⁷Odcinki oznaczające chwilowe orientacje platformy wykreślone zostały co 0.05[s].

Kolejny zestaw wyników symulacyjnych dotyczy zadania stabilizacji z zadaniem niezzerowym punktem referencyjnym \mathbf{q}_t . W tym przypadku wybrano:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) = \mathbf{q}_t \triangleq \begin{bmatrix} \pi/4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{q}_t(0)$, $\mathbf{q}(0)$ wyrażone są w $[rad]$ i $[m]$. Podczas symulacji przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5, k_1 = 10, \eta = 3$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiono na rys. 3.36-3.40, a wynikową ścieżkę robota w przestrzeni zadania na rys. 3.41.

Wpływ poszczególnych współczynników k_p, k_1 oraz η na sposób osiągnięcia przez robota punktu referencyjnego ukazują rys. 3.42-3.45 (przyjęto $\mathbf{q}_t = \mathbf{0}$). Z rys. 3.42 wynika, że efekt *naprowadzania* robota zależy bezpośrednio od wartości η . Im większa wartość tego współczynnika, tym dłuższy końcowy etap prawie prostoliniowego podjazdu platformy w kierunku punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t^* = [x_t \ y_t]^T$. Jakkolwiek wzrost wartości współczynnika k_p przy ustalonym η może znacząco osłabić ten, często pożądaną, efekt (rys. 3.43). Z analizy rys. 3.45 wynika, iż aby zachować (w przybliżeniu) efekt naprowadzania, wraz ze wzrostem k_p należy zwiększać wartość η tak, by utrzymać stałą różnicę między tymi dwoma współczynnikami. Ilościowy wpływ wszystkich nastaw na jakość procesu stabilizacji (z punktu widzenia wartości wskaźników J_1 i J_2) przedstawiają tabele 3.3-3.6.

Tab. 3.3: Wartości wskaźników jakości J_1, J_2 dla trzech wybranych wartości współczynnika k_p (przy ustalonych k_1 i η) dla zadania stabilizacji.

k_1	k_p	η	J_1	J_2
10	10	5	1.792	46.78
10	8	5	1.824	42.96
10	6	5	2.283	41.05

Tab. 3.4: Wartości wskaźników jakości J_1, J_2 dla trzech wybranych wartości współczynnika k_1 (przy ustalonych k_p i η) dla zadania stabilizacji.

k_1	k_p	η	J_1	J_2
20	5	3	2.198	58.13
10	5	3	2.531	35.33
5	5	3	3.253	23.79

Tab. 3.5: Wartości wskaźników jakości J_1, J_2 dla trzech wybranych wartości współczynnika η (przy ustalonych k_1 i k_p) dla zadania stabilizacji.

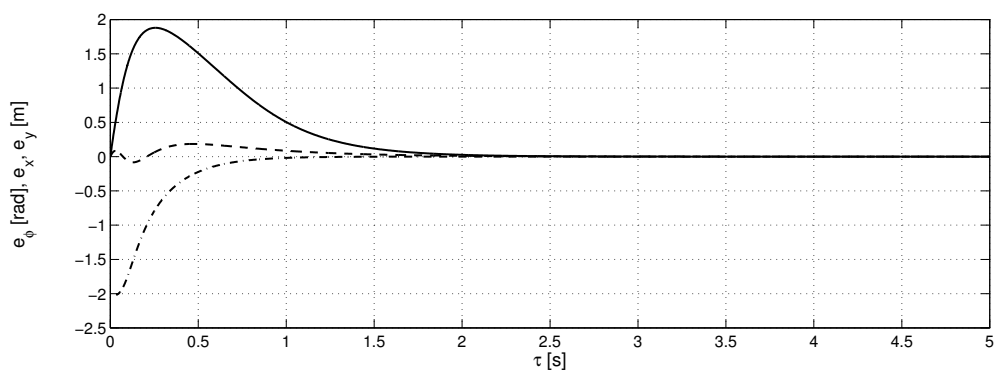
k_1	k_p	η	J_1	J_2
10	10	9	1.615	51.63
10	10	6	1.627	47.57
10	10	3	2.581	45.94

Tab. 3.6: Wartości wskaźników jakości J_1, J_2 dla trzech wybranych wartości współczynnika k_p dla stałej różnicy między k_p i η : $k_p - \eta = 2$ (przy ustalonym k_1) dla zadania stabilizacji.

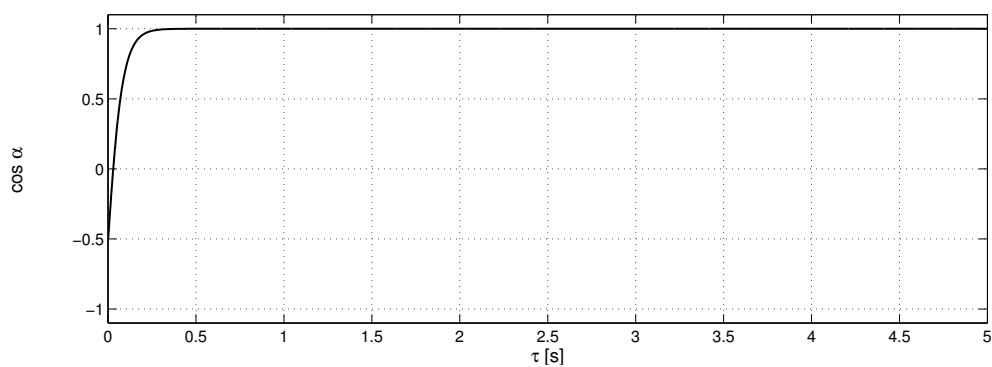
k_1	k_p	η	J_1	J_2
10	10	8	1.521	50.04
10	8	6	1.772	44.60
10	6	4	2.187	38.69

3.1.5 Podsumowanie

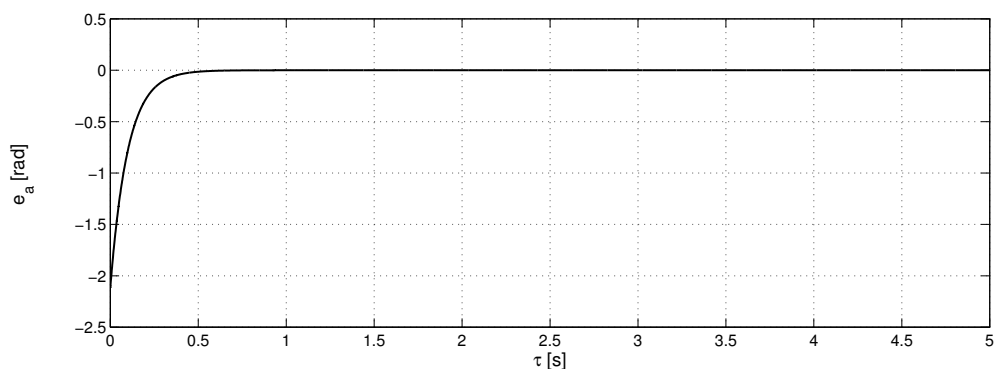
Powyżej przedstawiono pierwszy z przykładów zastosowania wprowadzonej wcześniej metody orientowania pól wektorowych dla modelu robota jednokołowego gwarantujący globalne



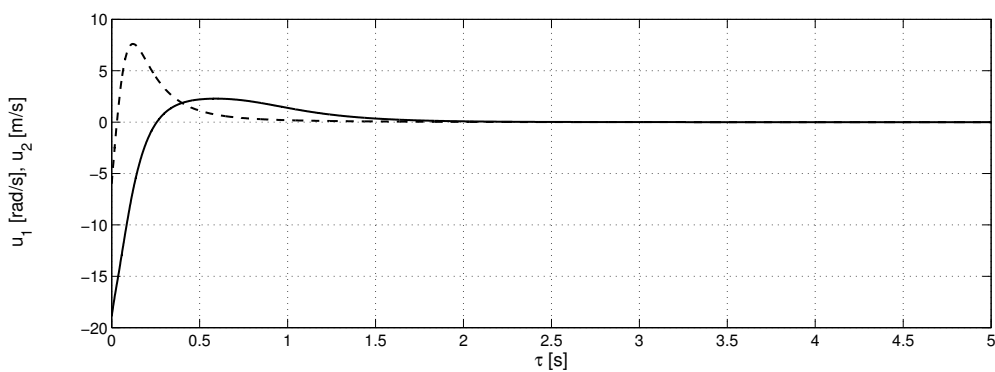
Rys. 3.29: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – błędy stabilizacji: e_ϕ (-), e_x (- -), e_y (-.-).



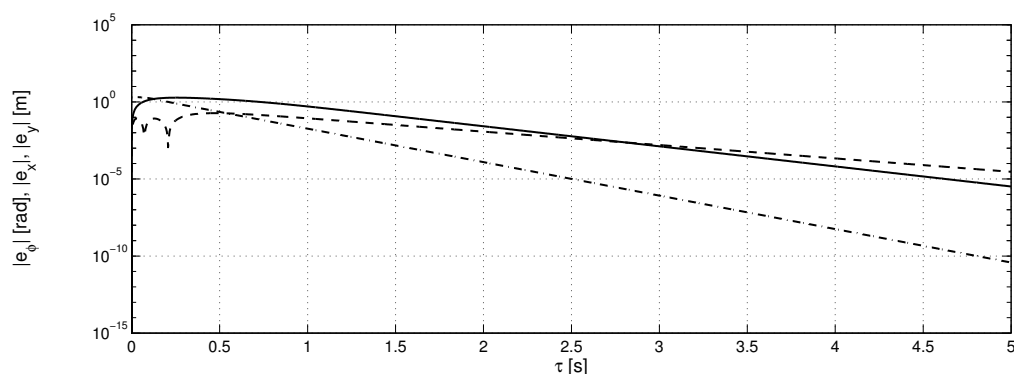
Rys. 3.30: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – efektywność orientowania pola \mathbf{g}_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(\mathbf{g}_2^*, \mathbf{h}^*)$.



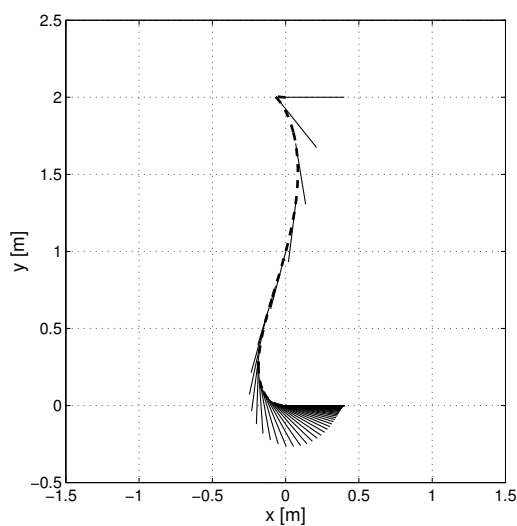
Rys. 3.31: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – pomocniczy błąd orientacji e_a .



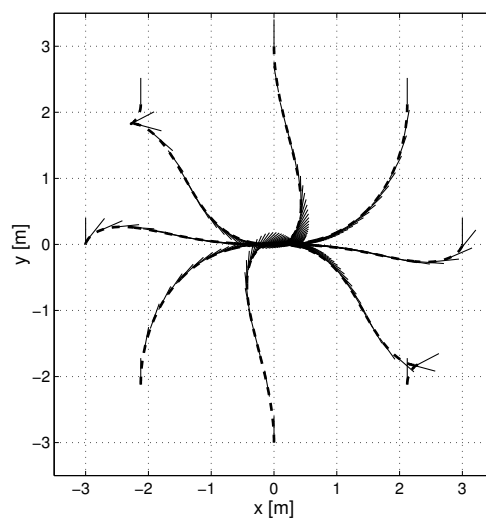
Rys. 3.32: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



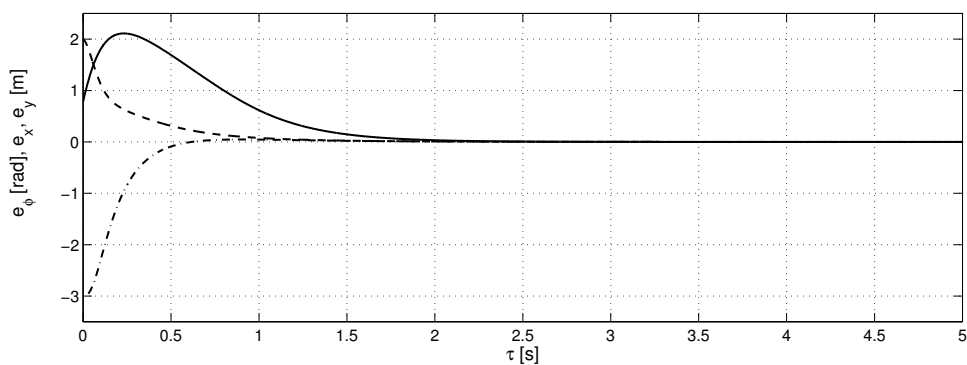
Rys. 3.33: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_\varphi|$ (—), $|e_x|$ (---), $|e_y|$ (-.-) w skali logarymicznej.



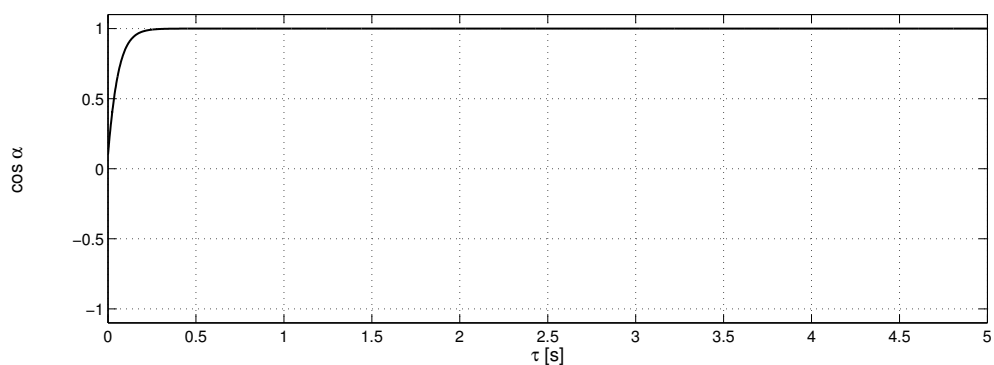
Rys. 3.34: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (stały punkt referencyjny $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$) – ścieżka robota w przestrzeni zadania.



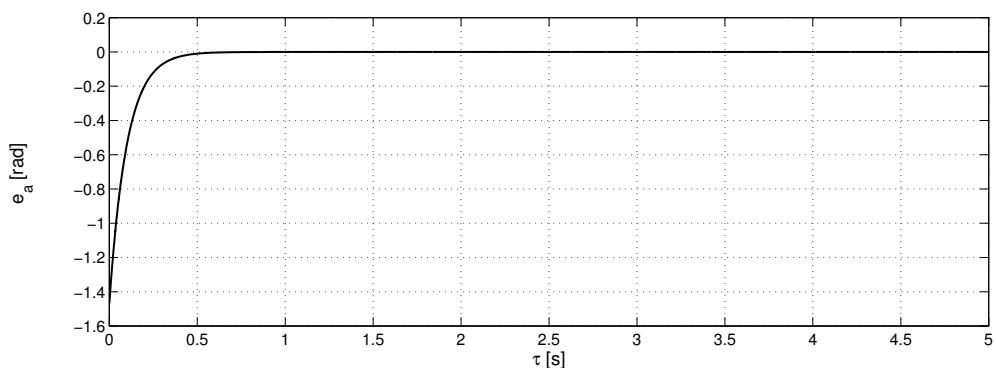
Rys. 3.35: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (stały punkt referencyjny $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$) – zbiór ścieżek robota w przestrzeni zadania dla ośmiu wybranych warunków początkowych $\mathbf{q}(0) = [\pi/2 \ x(0) \ y(0)]^T$, gdzie punkty $\mathbf{q}^* = [x(0) \ y(0)]^T$ leżą na okręgu o promieniu $R = 3$.



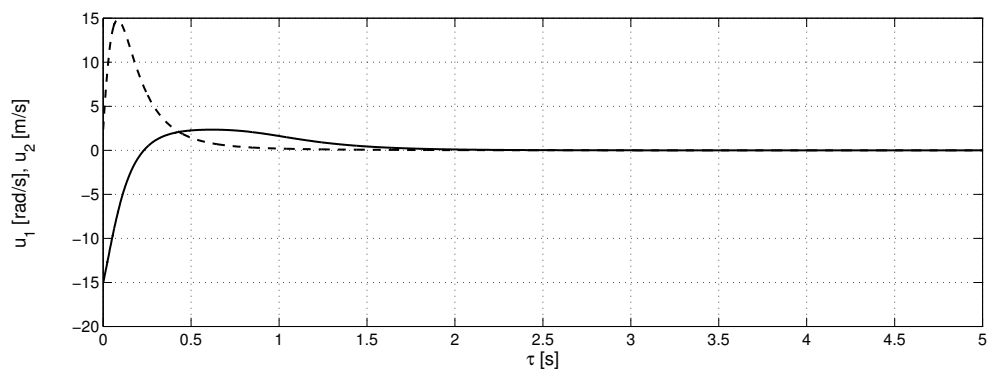
Rys. 3.36: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – błędy stabilizacji: e_ϕ (-), e_x (-), e_y (-.-).



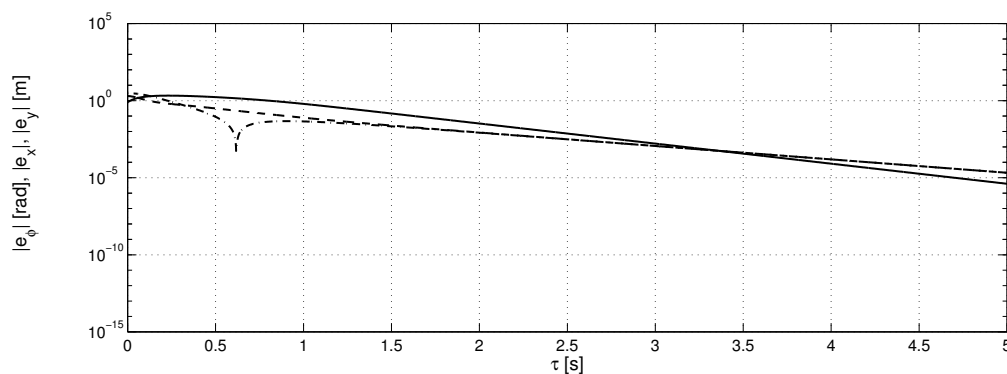
Rys. 3.37: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



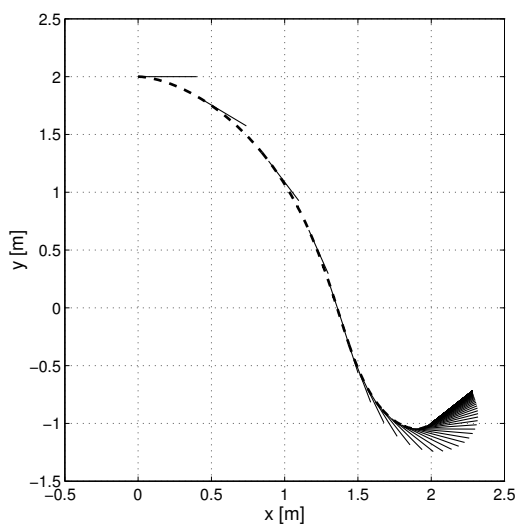
Rys. 3.38: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – pomocniczy błąd orientacji e_a .



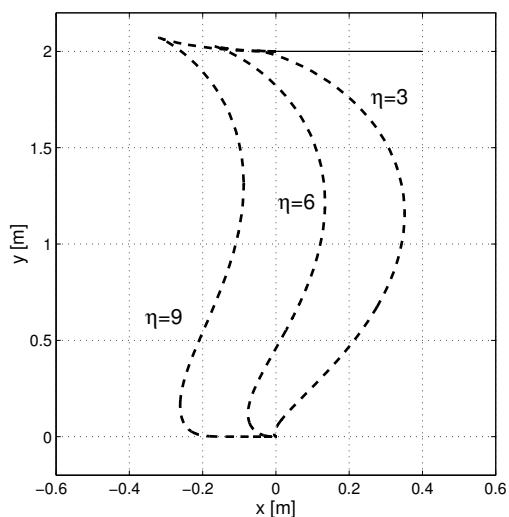
Rys. 3.39: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (-).



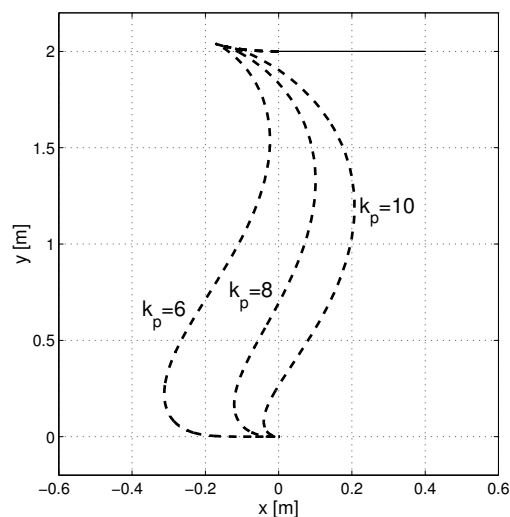
Rys. 3.40: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_\varphi|$ (—), $|e_x|$ (---), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



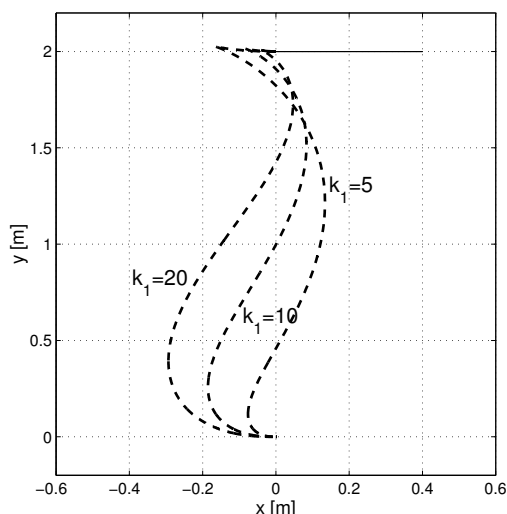
Rys. 3.41: Σ_{UMR} : trajektoria T4 (stały punkt referencyjny $\mathbf{q}_t \triangleq [\pi/4 \ 2 \ -1]^T$) – ścieżka robota w przestrzeni zadania.



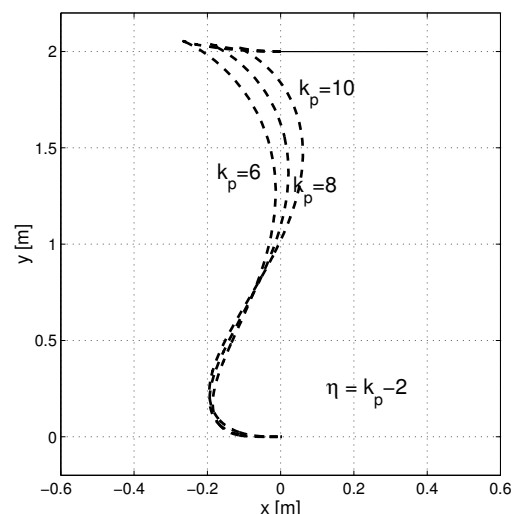
Rys. 3.42: Σ_{UMR} : wpływ wartości współczynnika η na jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji (przyjęto: $k_p = 10, k_1 = 10, \mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}, \mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 2]^T$).



Rys. 3.43: Σ_{UMR} : wpływ wartości współczynnika k_p na jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji (przyjęto: $k_1 = 10, \eta = 5, \mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}, \mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 2]^T$).



Rys. 3.44: Σ_{UMR} : wpływ wartości współczynnika k_1 na jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji (przyjęto: $k_p = 5, \eta = 3, \mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}, \mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 2]^T$).



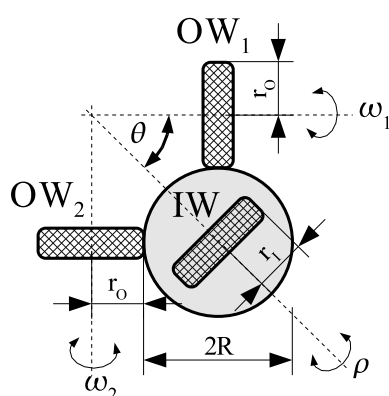
Rys. 3.45: Σ_{UMR} : jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji w funkcji wartości współczynnika k_p w przypadku stałej różnicy między k_p i η : $k_p - \eta = 2$ (przyjęto: $k_1 = 10, \mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}, \mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 2]^T$).

rozwiązanie dwóch zadań sterowania: asymptotyczne śledzenie dopuszczalnych trajektorii zmiennych w czasie oraz asymptotyczną (a także praktyczną) stabilizację w punkcie. Zaproponowano dwa rodzaje praw sterowania dla każdego z zadań: ciągłe w czasie sterowniki VFO niezdefiniowane jednak w pewnych punktach dziedziny błędu \mathbf{e} oraz odcinkami ciągłe sterowniki VFO dobrze określone w całej dziedzinie błędu regulacji \mathbf{e} . W przypadku zadania stabilizacji, wprowadzono tzw. *prawie stabilizatory* VFO wykazujące nieciągłość jedynie w punkcie stabilizacji. Warto podkreślić, iż struktury przedstawionych sterowników VFO dedykowanych zarówno do zadania śledzenia jak i zadania stabilizacji są jednakowe, a jedyna różnica między nimi wynika z postaci pola wektorowego zbieżności \mathbf{h} i sposobu określania znaku funkcji $k(\tau)$. Konstrukcja pola \mathbf{h} odgrywa kluczową rolę w kształtowaniu sposobu ewolucji systemu, szczególnie w stanach przejściowych. Zaproponowane wyżej definicje pola \mathbf{h} są przykładami takiej konstrukcji, prowadzącymi do naturalnego ruchu sterowanego systemu w przestrzeni zadania.

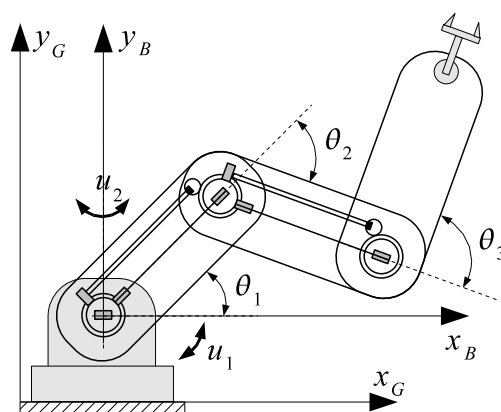
Przytoczony model robota jednokołowego stanowi kanoniczny przypadek rozważanych systemów z podklasy Σ pozwalający na prostą i przejrzystą interpretację i ocenę uzyskanych wyników sterowania. Przedstawione wyniki symulacyjne dają możliwość oceny zasadności zastosowanej metodologii VFO oraz ukazują specyficzne cechy zaproponowanych sterowników, a mianowicie: prostotę i łatwość interpretacji ogólnej struktury równań, prostotę doboru współczynników projektowych niezależnie od rodzaju zadania i warunków początkowych oraz szybką zbieżność błędów regulacji i naturalny, nieoscylacyjny ruch sterowanego systemu w stanach przejściowych.

3.2 Manipulator z przekładniami nieholonomicznymi

Ciekawą konstrukcję manipulatora, w której wykorzystano cechy systemów nieholonomicznych zaproponowano w pracach [SNC94, NCS01]. Przedstawione tam ramię manipulatoryjne o N ogniwach jest napędzane tylko przez dwa niezależne napędy zamontowane przy podstawie. Nowatorski sposób przeniesienia napędu wzdłuż całego łańcucha kinematycznego gwarantuje pełną sterowalność systemu. Kluczowym elementem całej konstrukcji są specjalnie zaprojektowane przekładnie kulowe umieszczone w każdym przegubie manipulatora. Każda taka przekładnia (por. rys. 3.46) składa się z kuli o promieniu R , koła wejściowego IW oraz zestawu kół wyjściowych OW_j , $j = 1, 2, \dots$. Liczba kół wyjściowych może być generalnie dowolna i koła te nie muszą być zamontowane w jednej płaszczyźnie. Bieżące rozważania zostaną jednak ograniczone do przypadku, w którym każda przekładnia składa się z dwóch identycznych kół wyjściowych umieszczonych prostopadłe względem siebie z osiami leżącymi w jednej płaszczyźnie. Odtąd zakładamy także, że kontakt wszystkich kół (wejściowych i wyjściowych) z kulą przekładni ma charakter punktowy oraz nie występują poślizgi między kołami a kulą. Koło wejściowe pierwszej przekładni napędzane jest jednym z silników (sterowanie u_2), podczas gdy drugi napęd (sterowanie u_1) pozwala na zmianę pozycji kątowej pierwszego ogniwa, a tym samym na zmianę położenia osi obrotu koła IW względem kuli (kąt θ na rys. 3.46) – por. rys. 3.47. Zakładając, że pręd-



Rys. 3.46: Nieholonomiczna przekładnia kulowa z dwoma kołami wyjściowymi.



Rys. 3.47: Manipulator planarny z przekładniami nieholonomicznymi (model (3.78)).

kość koła wejściowego pierwszej przekładni wynosi ρ , prędkości ω_1, ω_2 obu kół wyjściowych wynikają z ortogonalnych rzutów prędkości ρ na płaszczyznę osi obrotu kół OW_1, OW_2

$$\omega_1 = \rho \frac{r_I}{r_O} \cos \theta, \quad (3.76)$$

$$\omega_2 = \rho \frac{r_I}{r_O} \sin \theta, \quad (3.77)$$

gdzie θ oznacza bieżącą wartość kąta między osiami obrotu kół IW i OW_1 jak zaznaczono na rys. 3.46. Kąt ten stanowi jednocześnie pierwszą współzrzedną konfiguracyjną całego manipulatora ($\theta \equiv \theta_1$ na rys. 3.47). Wielkości r_I, r_O opisują promienie odpowiednich kół przekładni. Zgodnie z równaniami (3.76)-(3.77), poprzez zmianę wartości kąta θ za

pomocą sterowania u_1 , istnieje możliwość zmiany wartości przenoszonych prędkości do obu kół wyjściowych. Jeżeli prędkości kół wyjściowych ω_1, ω_2 zostaną odpowiednio przeniesione do kolejnej przekładni kulowej w łańcuchu kinematycznym robota, to uzyskamy zdolność do zmiany wszystkich współrzędnych konfiguracyjnych manipulatora wykorzystując tylko dwa napędy. Oznaczmy poprzez θ_i , $i = 1, 2, 3$ kąty konfiguracyjne manipulatora z rys. 3.47. Wówczas zakładając dla prostoty rozważań $r_I = r_O$, otrzymamy następujące relacje wiążące prędkości przekładni z prędkościami współrzędnych konfiguracyjnych [MK04]:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{i+1} = \rho_i \sin \theta_i, \\ \rho_{i+1} = \rho_i \cos \theta_i, \end{cases} \quad \text{przy czym z założenia:} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 \triangleq u_1, \\ \rho_1 \triangleq u_2. \end{cases}$$

Wykorzystując powyższe równania można sformułować model kinematyki dla planarnego manipulatora o trzech ogniwach w następującej postaci¹⁸:

$$\Sigma_{NHM} : \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} u_2, \quad (3.78)$$

gdzie $\mathbf{q} \triangleq [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ jest wektorem stanu, a $u_1, u_2 \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ oznaczają sygnały wejściowe (w fizycznej interpretacji odpowiednio: prędkość obrotu pierwszego ogniwa oraz prędkość koła wejściowego pierwszej przekładni kulowej). Przywołując ogólną postać modeli podklasy (2.1)-(2.2) łatwo zauważyć, że $\Sigma_{NHM} \in \Sigma$ oraz $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_2(\theta_{1,2})$, gdzie:

$$\mathbf{g}_2(\theta_{1,2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\theta_1) \\ g_3(\theta_{1,2}) \end{bmatrix} \stackrel{(3.78)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2}) \triangleq \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.79)$$

Niecałkowalne więzy kinematyczne związane z kinematyką (3.78) mogą być zapisane w postaci Pfaffa

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = [0 \ -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \ -\sin \theta_1] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad \dot{\mathbf{q}} \stackrel{(3.78)}{=} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.80)$$

i wynikają z wyeliminowania sygnału u_2 z dwóch ostatnich równań w (3.78).

Uwaga 3.8 Pole wektorowe $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ modelu (3.78) nie jest dobrze określone (degeneruje się do zera) między innymi w punkcie $\bar{\mathbf{q}} = [0 \ 0 \ 0]^T$. W tym punkcie zatem nie jest spełniony warunek konieczny W2 stosowalności metody VFO. Z tego względu, że zadanie stabilizacji chcemy rozważyć, między innymi, dla tego właśnie punktu pola, wymagana jest pewna modyfikacja przeniesienia napędu dla ostatniego ogniwa manipulatora, która zagwarantuje, iż $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ będzie regularnym punktem generatora $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$.

¹⁸Przy założeniu jednostkowych wartości współczynników przekładni przenoszących prędkości kół wyjściowych do następnej przekładni kulowej w łańcuchu kinematycznym [MK04].

Niewielka modyfikacja przeniesienia napędu do ostatniego ogniwa (patrz rys. 3.48) pozwala na modyfikację modelu kinematyki manipulatora jak następuje [KMP05]:

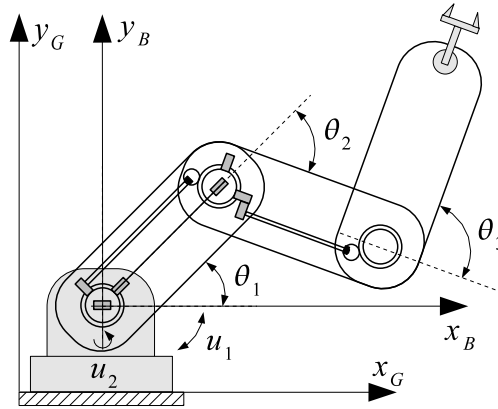
$$\Sigma_{NHMmod} : \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} u_2, \quad (3.81)$$

przy czym teraz

$$\mathbf{g}_2(\theta_{1,2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\theta_1) \\ g_3(\theta_{1,2}) \end{bmatrix} \stackrel{(3.81)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2}) \triangleq \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.82)$$

a ograniczenia nieholonomiczne przyjmują postać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = [0 \ -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \ -\sin \theta_1] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad \dot{\mathbf{q}} \stackrel{(3.78)}{=} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.83)$$



Rys. 3.48: Manipulator planarny z przekładniami nieholonomicznymi ze zmodyfikowanym przeniesieniem napędu dla ostatniego ogniwa (model (3.81)).

Ze względu na argumenty zawarte w uwadze 3.8, w dalszym ciągu uwaga skupiona zostanie na modelu¹⁹ (3.81)-(3.83).

Przeanalizujemy teraz kinematykę systemu Σ_{NHMmod} pod względem własności związanych z metodologią VFO. Sprawdźmy cztery warunki konieczne stosowalności metody.

Warunek **W1**: można pokazać, że $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ system Σ_{NHMmod} jest w pełni sterowalny:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{C}_1) &= 3 = \dim(\mathbf{q}), & \text{dla} & \quad \{\theta_{1,2} : \theta_1 \neq \pm d\pi \wedge \theta_2 \neq \pm(2d-1)\frac{\pi}{2}\} \\ \text{rank}(\mathbf{C}_2) &= 3 = \dim(\mathbf{q}), & \text{dla} & \quad \{\theta_{1,2} : \theta_1 = \pm d\pi \wedge \theta_2 = \pm(2d-1)\frac{\pi}{2}\} \end{aligned}$$

¹⁹Propozycję rozwiązania zadania śledzenia metodą VFO dla modelu (3.78) można znaleźć w pracach [MN05, MK04].

gdzie $d = 0, 1, 2, \dots$, a macierze sterowalności mają postać:

$$\mathbf{C}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2(\theta_{1,2}) & [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2(\theta_{1,2})] \end{bmatrix} \stackrel{(3.81)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2(\theta_{1,2}) & [\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2(\theta_{1,2})]] \end{bmatrix} \stackrel{(3.81)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Warunek **W2**: z postaci pola $\mathbf{g}_2(\theta_{1,2})$ wynika, że nie wszystkie punkty $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ tego pola są regularne. Zatem metoda VFO może zostać tutaj zastosowana tylko dla pewnej podprzestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{Q}'_{NHMmod} . Zdefiniujmy zbiór punktów, w których pole $\mathbf{g}_2(\theta_{1,2})$ degeneruje się do zera:

$$\mathcal{D} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : \theta_1 = \pm \pi d \wedge \theta_2 = \pm(2d-1)\frac{\pi}{2}\}, \quad d = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.84)$$

Podprzestrzeń konfiguracyjna, w której spełniony zostanie warunek W2 jest określona jak następuje:

$$\mathcal{Q}'_{NHMmod} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}\}. \quad (3.85)$$

Tak definiowana podprzestrzeń rozwiązuje problem regularności pola $\mathbf{g}_2(\theta_{1,2})$. Jednak sama definicja podprzestrzeni \mathcal{Q}'_{NHMmod} nie wystarcza. Należy bowiem odpowiedzieć na pytanie jak zapewnić, by stan $\mathbf{q}(\tau)$ układu (3.81) nie opuszczał tej podprzestrzeni w całym horyzoncie czasowym sterowania (przy założeniu, bez utraty ogólności rozważań, że $\mathbf{q}(0) \in \mathcal{Q}'_{NHMmod}$). Problem ten jest trudny zwłaszcza w przypadku, gdy zbiór \mathcal{D} jest określony poprzez jednoczesność wystąpienia warunków z (3.84). Aby ułatwić spełnienie wspomnianych ograniczeń konfiguracyjnych, zaproponujemy wprowadzenie następującej podprzestrzeni:

$$\mathcal{Q}''_{NHMmod} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : \theta_2(\tau) \in \left(-\varepsilon\frac{\pi}{2}, \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) \forall \tau \geq 0\}, \quad (3.86)$$

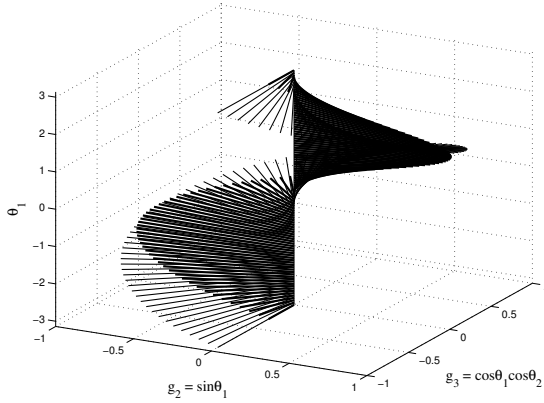
gdzie $0 < \varepsilon \leq 1$ jest pewną pożądaną miarą odstepu pozycji kątowej drugiego ogniwka od końców przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$. Oczywiście $\mathcal{Q}''_{NHMmod} \subset \mathcal{Q}'_{NHMmod}$, a powyższe ograniczenie wartości zmiennej θ_2 nie narusza własności pełnej orientowalności pola $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$, co zostanie pokazane niżej. Teraz problem zapewnienia pozostawania wektora stanu \mathbf{q} w podprzestrzeni \mathcal{Q}'_{NHMmod} może zostać zastąpiony łatwiejszym problemem zapewnienia pozostawania \mathbf{q} w \mathcal{Q}''_{NHMmod} . Ceną takiego ułatwienia jest konserwatywne ograniczenie przestrzeni konfiguracyjnej sterowanego systemu. Do tej kwestii wrócimy jeszcze w dalszej części pracy, a odtąd zakładamy, że (3.86) jest dopuszczalną podprzestrzenią konfiguracyjną dla manipulatora (3.81).

Warunek **W3**: obie składowe pola $\mathbf{g}_2(\theta_{1,2})$ są ograniczonymi funkcjami zmiennych θ_1, θ_2 : $g_2 = \sin \theta_1, g_3 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \in [-1, 1]$.

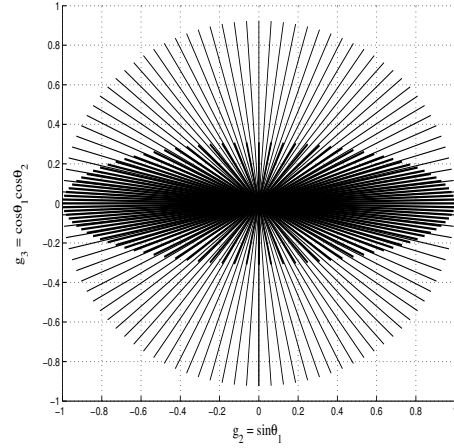
Warunek **W4**: zmiana wartości zmiennych stanu $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{Q}''_{NHMmod}$ implikuje zmianę orientacji pola $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$ w \mathbb{R}^2 , ponieważ:

$$\cos \alpha = \frac{z_1 \sin \theta_1 + z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}} \Rightarrow \alpha = \alpha(\theta_{1,2}) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_{1,2}} \neq 0,$$

gdzie $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2}), \mathbf{z})$, a $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ jest pewnym polem odniesienia. Zbiory kierunków i orientacji osiągalnych przez pole \mathbf{g}_2^* w przestrzeni \mathbb{R}^2 jako funkcje zmiennej θ_1 dla dwóch ustalonych wartości zmiennej $\theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zostały pokazane na rys. 3.49 i 3.50.



Rys. 3.49: Osiągalne kierunki i orientacje pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\varphi) = [\sin \theta_1 \ \cos \theta_1 \cos \theta_2]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcje zmiennej orientującej θ_1 dla $\theta_1 \in [-\pi, \pi]$ oraz dwóch ustalonych wartości zmiennej $\theta_2 = \pi/2.5$ (grubsze linie) i $\theta_2 = \pi/8$ (wykres z dyskretyzacją $\Delta\theta_1 = 2\pi/100$).



Rys. 3.50: Osiągalne kierunki i orientacje pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(\varphi) = [\sin \theta_1 \ \cos \theta_1 \cos \theta_2]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcje zmiennej orientującej θ_1 dla $\theta_1 \in [-\pi, \pi]$ oraz dwóch ustalonych wartości zmiennej $\theta_2 = \pi/2.5$ (grubsze linie) i $\theta_2 = \pi/8$ – rzut ortogonalny na płaszczyznę $g_2 \times g_3$ (wykres z dyskretyzacją $\Delta\theta_1 = 2\pi/100$).

Z powyższych rozważań oraz z analizy modelu (3.81) wynika ponadto, że zmienne $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{Q}_o$ są zmiennymi orientującymi, przy czym tylko θ_1 jest zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio. Podobnie jak w przypadku modelu robota jednokołowego, także tutaj $u_1 \in \mathcal{U}_o$ jest sterowaniem orientującym. Ze względu na to, że także $\theta_2 \in \mathcal{Q}_o$, drugie sterowanie $u_2 \in \mathcal{U}_o$ jest również sterowaniem orientującym. Dodatkowo $u_2 \in \mathcal{U}_p$ ze względu na ostatnie równanie w (3.81), w którym zmienna $\theta_3 \notin \mathcal{Q}_o$. Zatem w przypadku systemu Σ_{NHMmod} zachodzi: $\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_p \neq \emptyset$ i w związku z tym nie możemy w pełni zdekomponować modelu na podsystem wyłączenie orientujący i podsystem wyłączenie popychany. Zgodnie z rysunkami 3.49 i 3.50 oraz zgodnie z definicją 2.15, pole wektorowe $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$ jest w pełni orientowalne w \mathbb{R}^2 : $\forall \bar{\alpha} \in (-\pi, \pi] \exists \bar{\mathbf{q}} \in \mathcal{Q}_{NHMmod}'' : \angle(\mathbf{g}_2^*(\bar{\mathbf{q}}), \mathbf{z}) = \bar{\alpha}$. Zgodnie z relacją **R4** jest ono także w pełni kierowalne w \mathbb{R}^2 (brak kierunków osobliwych). Warto zauważyć, iż bieżąca wartość zmiennej θ_2 determinuje bieżącą długość wektorów $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$ w \mathbb{R}^2 , co świadczy o tym, iż przy ustalonym sterowaniu u_2 efektywność procesu popychania w kierunku składowym definiowanym współrzędną g_3 pola \mathbf{g}_2 jest funkcją zmiennej θ_2 . W granicy dla $\theta_2 \rightarrow \pm(2d-1)\frac{\pi}{2}$ możliwość realizacji procesu popychania wzdłuż tej składowej zanika dla wszystkich możliwych wartości zmiennej orientującej θ_1 . W szczególnym przypadku natomiast, gdy $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D}$ (por. (3.84)), popychanie podsystemu $\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})u_2$ w jakimkolwiek kierunku staje się niemożliwe bez względu na wartość sterowania u_2 .

Ostatecznie warunki konieczne W1-W4 są dla systemu Σ_{UMR} spełnione przy ograniczeniu przestrzeni konfiguracyjnej do podprzestrzeni \mathcal{Q}'_{NHMmod} zdefiniowanej w (3.85), a także dla podprzestrzeni \mathcal{Q}''_{NHMmod} z (3.86). Przynależność sygnałów systemu (3.81) do

odpowiednich zbiorów, z punktu widzenia metody VFO, można zapisać w postaci zestawu następujących relacji:

$$\Sigma_{NHMmod} : \begin{cases} \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{Q}_o, \\ \theta_3 \notin \mathcal{Q}_o, \\ u_1, u_2 \in \mathcal{U}_o, \\ u_2 \in \mathcal{U}_p, \\ U_o \cap U_p = \{u_2\}. \end{cases} \quad (3.87)$$

Model manipulatora nieholonomicznego pozwala na realizację trajektorii typów T2, T3 i T4. Nie ma generalnie możliwości realizacji trajektorii *czysto* popychającej (typ T1) z tego względu, że $u_2 \in \mathcal{U}_o \wedge u_2 \in \mathcal{U}_p$. Zatem każda niezerowa wartość sterowania u_2 skutkować będzie zarówno zmianą orientacji pola $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$ jak i popychaniem zmiennej nieorientującej θ_3 (wyjątek stanowi sytuacja, gdzie $\forall \tau \geq 0 \theta_1(\tau) \equiv \pm \pi d = const$). W interpretacji geometrycznej i fizycznej ruch wzdłuż trajektorii *czysto* orientującej (T2) implikuje obrót pierwszego ogniwa przy zatrzymanych dwóch pozostałych ogniwach. Trajektoria popychająco-orientująca (T3) stanowi ogólny ruch wszystkich ogniw manipulatora. Trajektoria zdegenerowana natomiast (T4) odpowiada pozostawianiu manipulatora w spoczynku z ustalonymi wartościami kątów konfiguracyjnych.

Rozważania zamieszczone w kolejnych trzech podpunktach oparte są częściowo na pracach [MK04, KMP05]. Dowody twierdzeń zamieszczonych poniżej przeprowadzone zostaną na podstawie dowodów twierdzeń 3.1 oraz 3.2. Pomimo, iż znaczne fragmenty rozważań dowodowych są analogiczne do tych z punktu 3.1, zostaną one celowo powtórzone, aby podkreślić wspólną systematykę dowodową.

3.2.1 Wykorzystanie metodologii VFO

Przyjmijmy ogólną postać pola zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$, początkowo bez definiowania poszczególnych składowych:

$$\mathbf{h}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ \mathbf{h}^*(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{h}^*(\cdot) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.88)$$

Do systemu Σ_{NHMmod} zastosujemy ogólną strategię VFO opisaną zależnościami (2.10)-(2.12). Zgodnie z (2.11) szukamy takiego sterowania u_1 , które gwarantuje spełnienie relacji:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2}(\tau)) k(\tau) = \mathbf{h}^*(\cdot) \xrightarrow{(3.82, 3.88)} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} k(\tau) \sin \theta_1(\tau) \\ k(\tau) \cos \theta_1(\tau) \cos \theta_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix},$$

gdzie $k(\tau)$ jest pewną niezerową funkcją skalarną. Łącząc oba powyższe równania w jedno, zależne od zmiennej orientującej θ_1 , otrzymujemy konkretną postać relacji (2.11) dla modelu manipulatora (3.81):

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_1(\tau) = \text{Atan2}(\text{sgn}(k)h_2(\cdot) \cos \theta_2(\tau), \text{sgn}(k)h_3(\cdot)), \quad (3.89)$$

gdzie granica po prawej stronie (3.89) określa tzw. *warunek orientowania* dla modelu (3.81). Podobnie jak dla robota jednokołowego, wykorzystanie $\text{sgn}(k)$ w powyższej relacji

pozwole na odpowiednie kształtowanie stanów przejściowych sterowanego systemu. Warto zwrócić uwagę, że w tym przypadku warunek orientowania (3.89) nakłada ograniczenia na ewolucję tylko jednej zmiennej orientującej θ_1 pomimo, że również $\theta_2 \in \mathcal{Q}_o$. Z tego względu, że składowa $g_3(\theta_{1,2})$ pola $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$ jest funkcją obu zmiennych orientujących, wpływ zmiennej θ_2 na zmianę orientacji pola $\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})$ będzie traktowany jako pewne zaburzenie, które należy kompensować w procesie orientowania poprzez spełnienie warunku (3.89).

Z postaci pierwszego równania w (3.81) wynika, że (3.89) nie może być spełnione natychmiastowo ze względu na całkowitą zależność zmiennej orientującej θ_1 od sterowania orientującego: $\theta_1(\tau) = \theta_1(0) + \int_0^\tau u_1(\xi)d\xi$. Wprowadzamy zatem *pomocniczą zmienną orientacji*:

$$\theta_{1a}(\tau) \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}(k)h_2(\cdot) \cos \theta_2(\tau), \text{sgn}(k)h_3(\cdot)) \in \mathbb{R}, \quad (3.90)$$

gdzie $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$ oznacza ciągłą wersję czterowartkowej funkcji $\text{Atan2}(\cdot, \cdot)$. Pomocniczej zmiennej orientacji odpowiada *pomocniczy błąd orientacji*:

$$e_{1a}(\tau) \triangleq \theta_{1a}(\tau) - \theta_1(\tau), \quad e_{1a}(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (3.91)$$

Spełnienie (3.89) wymaga teraz znalezienia takiego sterowania u_1 , aby zapewnić asymptotyczną zbieżność błędu $e_{1a}(\tau)$ do zera. Biorąc pod uwagę pierwsze równanie w modelu (3.81) oraz definicję (3.91) proponuje się następującą postać sterowania orientującego:

$$u_1 \triangleq k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{\theta}_{1a}(\tau), \quad (3.92)$$

gdzie $k_1 > 0$ jest współczynnikiem projektowym, a sygnał sprzężenia wyprzedzającego $\dot{\theta}_{1a}(\tau)$ ma następującą postać ogólną:

$$\dot{\theta}_{1a}(\tau) \stackrel{(3.90)}{=} \frac{(\dot{h}_2 h_3 - h_2 \dot{h}_3) \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2 h_2 h_3 \sin \theta_2}{h_3^2 + h_2^2 \cos^2 \theta_2}, \quad \text{dla } h_3^2 + h_2^2 \cos^2 \theta_2 \neq 0. \quad (3.93)$$

Zgodnie z relacją (2.12) ogólnej strategii VFO, przyjmijmy następującą ogólną postać sterowania popychającego dla systemu Σ_{NHMmod} :

$$u_2 \triangleq k_2(\theta_{1,2}) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha, \quad \alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2}), \mathbf{h}^*), \quad (3.94)$$

gdzie dla $\|\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})\| \neq 0$:

$$k_2(\theta_{1,2}) \triangleq \frac{1}{\|\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})\|} \stackrel{(3.81)}{=} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}} \quad (3.95)$$

oraz

$$\cos \alpha \stackrel{(2.18)}{=} \frac{\mathbf{g}_2^{*T}(\theta_{1,2}) \mathbf{h}^*}{\|\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})\| \|\mathbf{h}^*\|}. \quad (3.96)$$

Zdefiniowany powyżej współczynnik skalujący $k_2(\theta_{1,2})$ został wprowadzony w celu zapewnienia zbieżności sterowania popychającego u_2 do sterowania referencyjnego u_{2t} w otoczeniu trajektorii referencyjnej $\mathbf{q}_t^* \triangleq [\theta_{2t} \ \theta_{3t}]^T$. Podstawiając (3.96) do ogólnej propozy-

cji (3.94), otrzymujemy uproszczoną postać sterowania popychającego dobrze określonego dla podprzestrzeni konfiguracyjnych \mathcal{Q}''_{NHMmod} i \mathcal{Q}'_{NHMmod} :

$$u_2 = \frac{\mathbf{g}_2^{*T}(\theta_{1,2}) \mathbf{h}^*}{\|\mathbf{g}_2^*(\theta_{1,2})\|^2} \stackrel{(3.81)}{=} \frac{h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}. \quad (3.97)$$

Przedstawioną metodologię VFO podsumowuje następująca propozycja.

Propozycja 3.3 (Sterownik VFO dla systemu Σ_{NHMmod} – postać ogólna) *Ogólna postać sterownika VFO dla modelu manipulatora (3.81) gwarantująca rozwiązanie zadania śledzenia oraz zadania stabilizacji w podprzestrzeni konfiguracyjnej (3.86) ma postać:*

$$\begin{aligned} u_1 &\triangleq k_1(\theta_{1a} - \theta_1) + \dot{\theta}_{1a}, \\ u_2 &\triangleq k_2(\theta_{1,2}) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha = \frac{h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}, \end{aligned}$$

gdzie θ_{1a} , $\dot{\theta}_{1a}$, $k_2(\theta_{1,2})$ i $\cos \alpha$ zdefiniowane są odpowiednio za pomocą (3.90), (3.93), (3.95) i (3.96).

Poniżej, w opraciu o propozycję 3.3, przedstawione zostaną ostateczne postaci praw sterowania VFO zarówno dla zadania śledzenia jak i stabilizacji w punkcie. Podstawową różnicą obu praw sterowania dla wymienionych zadań będą: definicja pola zbieżności $\mathbf{h}(\cdot)$ oraz sposób określania znaku funkcji $k(\tau)$ w wyrażeniu (3.90).

3.2.2 Zadanie śledzenia trajektorii

Rozważmy model kinematyki (3.81), którego ewolucja została ograniczona do podprzestrzeni konfiguracyjnej (3.86). Dla tego modelu dana jest trajektoria referencyjna $\mathbf{q}_t(\tau)$, $\tau \in [0, T)$, gdzie $T > 0$ jest horyzontem czasowym śledzenia. Zakładamy, że $\mathbf{q}_t(\tau) \in \mathcal{Q}''_{NHMmod}$ oraz że $\mathbf{q}_t(\tau)$ należy do zbioru trajektorii dopuszczalnych \mathcal{T}_{AD} i ustawicznie pobudzających \mathcal{T}_{PE} , tzn. (zgodnie z def. 2.23 i 2.24):

$$\mathbf{q}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \theta_{1t}(\tau) \\ \theta_{2t}(\tau) \\ \theta_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_{1t}(\tau) \\ \mathbf{q}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_{1t}(0) + \int_0^\tau u_{1t}(\xi) d\xi \\ \theta_{2t}(0) + \int_0^\tau \sin \theta_{1t}(\xi) u_{2t}(\xi) d\xi \\ \theta_{3t}(0) + \int_0^\tau \cos \theta_{1t}(\xi) \cos \theta_{2t}(\xi) u_{2t}(\xi) d\xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.98)$$

przy czym

$$\mathbf{q}_t(\tau) : \quad \forall_{\tau \in [0, T)} u_{2t}(\tau) \neq 0. \quad (3.99)$$

Ponadto zakładamy, że:

$$u_{1t}(\tau), u_{2t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty, \mathcal{C}^1. \quad (3.100)$$

Prędkość referencyjna wzdłuż trajektorii dopuszczalnej $\mathbf{q}_t(\tau)$ wynika z postaci modelu Σ_{NHMmod} lub bezpośrednio z różniczkowania (3.98):

$$\dot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1t}(\tau) \\ \dot{\theta}_{2t}(\tau) \\ \dot{\theta}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1t}(\tau) \\ \dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.81)}{=} \begin{bmatrix} u_{1t}(\tau) \\ \sin \theta_{1t}(\tau) u_{2t}(\tau) \\ \cos \theta_{1t}(\tau) \cos \theta_{2t}(\tau) u_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.101)$$

Przyspieszenie referencyjne wzdłuż trajektorii $\mathbf{q}_t(\tau)$ wynika z różniczkowania (3.101):

$$\ddot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{1t}(\tau) \\ \ddot{\theta}_{2t}(\tau) \\ \ddot{\theta}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.101)}{=} \begin{bmatrix} \dot{u}_{1t}(\tau) \\ u_{1t}(\tau) \cos \theta_{1t}(\tau) u_{2t}(\tau) + \sin \theta_{1t}(\tau) \dot{u}_{2t}(\tau) \\ -\dot{C}_{1t,2t}(\tau) u_{2t}(\tau) + \cos \theta_{1t}(\tau) \cos \theta_{2t}(\tau) \dot{u}_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.102)$$

gdzie $\dot{C}_{1t,2t}(\tau) \equiv u_{1t}(\tau) \sin \theta_{1t}(\tau) \cos \theta_{2t}(\tau) + \sin \theta_{1t}(\tau) u_{2t}(\tau) \sin \theta_{2t}(\tau) \cos \theta_{1t}(\tau)$.

Zgodnie z (3.101), definicję sygnału referencyjnego dla pierwszego ogniwa manipulatora $\theta_{1t}(\tau)$ z (3.98) można określić w następujący równoważny sposób:

$$\theta_{1t}(\tau) \triangleq \text{Atan2c} \left(\text{sgn}(u_{2t}) \dot{\theta}_{2t}(\tau) \cos \theta_{2t}(\tau), \text{sgn}(u_{2t}) \dot{\theta}_{3t}(\tau) \right) \in \mathbb{R}, \quad (3.103)$$

gdzie $\text{sgn}(u_{2t})$ określa strategię ruchu wzdłuż trajektorii referencyjnej: *ruch do przodu* / *ruch do tyłu*²⁰. W przypadku trajektorii ustawicznie pobudzających (3.98) należących do podprzestrzeni \mathcal{Q}'_{NHMmod} mamy:

$$\forall_{\tau \geq 0} u_{2t}(\tau) \neq 0 \quad \stackrel{(3.101)}{\implies} \quad \forall_{\tau \geq 0} \dot{\theta}_{2t}^2(\tau) + \dot{\theta}_{3t}^2(\tau) \neq 0$$

i definicja (3.103) jest dobrze określona dla każdego $\tau \geq 0$.

Uwaga 3.9 Zgodnie z podziałem trajektorii referencyjnych z rozdziału 2 oraz ze względu na brak możliwości realizacji trajektorii czysto popychających dla modelu (3.81), rozpatrywane tutaj trajektorie dopuszczalne (3.98) ograniczono do typu T3.

Uwaga 3.10 Geometryczna interpretacja strategii ewolucji typu *ruch do przodu* / *ruch do tyłu* dla manipulatora (3.81) nie jest już tak intuicyjna, jak w przypadku robota jednokolowego. Jednak utożsamiając, w sensie metodologii VFO, zmienne φ oraz θ_1 modeli (3.1) i (3.81), łatwo znaleźć taką interpretację. Mianowicie, strategia ruchu do tyłu oznacza dla manipulatora, że $\theta_1(\tau) = \theta_{1F}(\tau) \pm \pi$ oraz $u_2(\tau) < 0$, gdzie $\theta_{1F}(\tau)$ jest ewolucją zmiennej orientującej θ_1 w strategii ruchu do przodu.

Zdefiniujmy błąd śledzenia trajektorii referencyjnej jako:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ e_2(\tau) \\ e_3(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{q}_t(\tau) - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} \theta_{1t}(\tau) - \theta_1(\tau) \\ \theta_{2t}(\tau) - \theta_2(\tau) \\ \theta_{3t}(\tau) - \theta_3(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.104)$$

Określmy teraz szczegółowo wyrażenia definiujące ogólną postać sygnałów sterujących u_1, u_2 dla zadania śledzenia przedstawionych w propozycji 3.3. W tym celu musimy zdefiniować element $\text{sgn}(k)$ występujący w wyrażeniu (3.90) oraz postać pola zbieżności \mathbf{h} .

²⁰Zgodnie z (3.99), sygnał $u_{2t}(\tau)$ nie zmienia znaku w całym horyzoncie czasowym sterowania.

Aby zapewnić zgodność strategii ruchu robota (*ruch do przodu/do tyłu*) w podprzestrzeni \mathcal{Q}''_{NHMmod} z żądaną strategią ruchu wzdłuż trajektorii referencyjnej (por. (3.103)), postuluje się spełnienie następującej relacji:

$$\text{sgn}(k(u_{2t}(\tau), \cdot)) \triangleq \text{sgn}(u_{2t}) \quad (3.105)$$

przy czym $\text{sgn}(u_{2t}(\tau)) \equiv \text{sgn}(u_{2t})$ nie zmienia się w całym horyzoncie sterowania $\tau \geq 0$ ze względu na warunek ustawicznego pobudzenia (por. (3.99)).

Pole zbieżności \mathbf{h} zaprojektujemy poprzez analogię do przykładu robota jednokołowego (patrz równania (3.25) i (3.26)) jako liniową kombinację odpowiednich błędów regulacji i sygnałów wyprzedzających:

$$\mathbf{h}(e_{1a}, \dot{\theta}_{1a}, \mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_t^*) = \begin{bmatrix} h_1(e_{1a}, \dot{\theta}_{1a}) \\ h_2(e_2, \dot{\theta}_{2t}) \\ h_3(e_3, \dot{\theta}_{3t}) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{\theta}_{1a}(\tau) \\ k_p e_2(\tau) + \dot{\theta}_{2t}(\tau) \\ k_p e_3(\tau) + \dot{\theta}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.106)$$

gdzie $k_1, k_p > 0$ są parametrami projektowymi. Z powyższej definicji wynika, że:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_t^*) = \begin{bmatrix} h_2(e_2, \dot{\theta}_{2t}) \\ h_3(e_3, \dot{\theta}_{3t}) \end{bmatrix} \triangleq k_p \mathbf{e}^*(\tau) + \dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.107)$$

Z porównania (3.92) z (3.106) mamy: $u_1 \triangleq h_1$, a składowa h_1 określa sposób zbieżności dla zmiennej orientującej θ_1 . Znowu poprzez analogię do przykładu robota jednokołowego, wprowadzenie propozycji (3.106) pozwala na początkowe powiększenie się błędu e_1 w stanie przejściowym, ale dzięki temu zapewnia szybką i *naturalną* zbieżność $\mathbf{q}^* = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ w pobliże trajektorii referencyjnej $\mathbf{q}_t^* = [\theta_{2t} \ \theta_{3t}]^T$. Dopiero po znalezieniu się systemu w okolicy \mathbf{q}_t^* , pomocniczy kąt orientacji θ_{1a} będzie przechodzić w sposób ciągły w referencyjny kąt θ_{1t} (przynajmniej w sensie dziedziny \mathbb{S}^1), a pomocniczy błąd orientacji e_{1a} stanie się błędem śledzenia e_1 (w \mathbb{S}^1). Zapewnienie zatem zbieżności e_{1a} do zera (co jest celem procesu orientowania) powinno w granicy (w otoczeniu punktu \mathbf{q}_t^*) skutkować zbieżnością pozycji kątowej pierwszego ogniwa do wartości referencyjnej θ_{1t} (w \mathbb{S}^1).

STEROWNIK 3 Sterownik VFO (3.92)-(3.97) dla zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie ma następującą postać (zakładając, że: $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$ oraz $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}''_{NHMmod}$):

$$u_1 \stackrel{(3.92)}{=} k_1(\theta_{1a} - \theta_1) + \dot{\theta}_{1a}, \quad (3.108)$$

$$u_2 \stackrel{(3.97)}{=} \frac{(k_p e_2 + \dot{\theta}_{2t}) \sin \theta_1 + (k_p e_3 + \dot{\theta}_{3t}) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}, \quad (3.109)$$

gdzie postać θ_{1a} wynika z (3.90), (3.106) oraz (3.105):

$$\theta_{1a} \triangleq \text{Atan2c} \left(\text{sgn}(u_{2t})(k_p e_2 + \dot{\theta}_{2t}) \cos \theta_2, \text{sgn}(u_{2t})(k_p e_3 + \dot{\theta}_{3t}) \right) \in \mathbb{R}, \quad (3.110)$$

postać $\dot{\theta}_{1a}$, na podstawie (3.93), wyraża się za pomocą wzoru:

$$\dot{\theta}_{1a} = \frac{(\dot{h}_2 h_3 - h_2 \dot{h}_3) \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2 h_2 h_3 \sin \theta_2}{h_3^2 + h_2^2 \cos^2 \theta_2}, \quad (3.111)$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_2 &\stackrel{(3.106)}{=} k_p(\theta_{2t} - \theta_2) + \dot{\theta}_{2t}, & \Rightarrow & \quad \dot{h}_2 = k_p(\dot{\theta}_{2t} - \dot{\theta}_2) + \ddot{\theta}_{2t}, \\ h_3 &\stackrel{(3.106)}{=} k_p(\theta_{3t} - \theta_3) + \dot{\theta}_{3t}, & \Rightarrow & \quad \dot{h}_3 = k_p(\dot{\theta}_{3t} - \dot{\theta}_3) + \ddot{\theta}_{3t}, \end{aligned}$$

a sygnały referencyjne $\dot{\theta}_{2t}, \dot{\theta}_{3t}$ oraz $\ddot{\theta}_{2t}, \ddot{\theta}_{3t}$ wynikają z (3.101)-(3.102).

♣

Twierdzenie 3.4 Dana jest trajektoria referencyjna (3.98)-(3.100) oraz obszar w dziedzinie błędu śledzenia: $\mathcal{E}_{NHM}^* \triangleq \mathbb{R}^2 \setminus \{e^*(\tau) : e^*(\tau) = -\frac{1}{k_p} \dot{q}_t^*(\tau)\}$. Zakładając, że $\forall \tau \geq 0 \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$ oraz:

$$\forall \tau \geq 0 \mathbf{e}^* \in \mathcal{E}_{NHM}^* \stackrel{(3.107)}{\implies} \forall \tau \geq 0 \|\mathbf{h}^*(\tau)\| \neq 0, \quad (3.112)$$

ciągłe prawo sterowania VFO (3.108)-(3.109) zastosowane do systemu (3.81) gwarantuje globalną asymptotyczną zbieżność błędu śledzenia (3.104) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_2(\tau), e_3(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 2\pi d, \quad d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dla dowolnego ograniczonego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{E}_{NHM}^*$.

Dowód. Rozważmy ewolucję zmiennej orientującej θ_1 . Podstawienie (3.108) do (3.81) daje następujące równanie:

$$(\dot{\theta}_{1a} - \dot{\theta}_1) + k_1(\theta_{1a} - \theta_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_{1a} + k_1 e_{1a} = 0,$$

z którego wynika, że θ_1 zmierza wykładniczo do wartości pomocniczej zmiennej orientacji θ_{1a} dla $\tau \rightarrow \infty$:

$$e_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_1(\tau) = \theta_{1a}(\tau). \quad (3.113)$$

Sterowanie orientujące (3.108) gwarantuje zatem spełnienie warunku orientowania (3.89).

Rozważmy zachowanie się błędu $e^* \in \mathbb{R}^2$. Na podstawie (3.104) i (3.107) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = \dot{q}_t^* - \dot{q}^* \quad \text{oraz} \quad \dot{q}_t^* \stackrel{(3.107)}{=} \mathbf{h}^* - k_p e^*.$$

Podstawiając prawą stronę ostatniego równania do równania z lewej strony otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\dot{e}^* + k_p e^* = \mathbf{r}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{r} \triangleq \mathbf{h}^* - \dot{q}^*. \quad (3.114)$$

Można prosto pokazać (Dodatek B.2), że prawdziwe są równania:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (3.115)$$

gdzie $\cos \alpha$ jest zdefiniowany w (3.96) oraz (Dodatek B.2)

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} (1 - \cos^2 \alpha(\theta_1)) = 0. \quad (3.116)$$

Zaproponujmy teraz następującą dodatnio określoną funkcję klasy \mathcal{K}_∞ :

$$V(\mathbf{e}^*) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* \in \mathcal{K}_\infty. \quad (3.117)$$

Pochodna tej funkcji może być oszacowana jak następuje (dla prostoty przyjęto oznaczenia: $\gamma = \gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(\theta_1(\tau))} \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{e}^{*T} \dot{\mathbf{e}}^* \stackrel{(3.114)}{=} \mathbf{e}^{*T} (-k_p \mathbf{e}^* + \mathbf{r}) = \\ &= -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \mathbf{e}^{*T} \mathbf{r} \leq \\ &\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{r}\| = \\ &\stackrel{(3.115)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{h}^*\| \gamma = \\ &\stackrel{(3.107)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|k_p \mathbf{e}^* + \dot{\mathbf{q}}_t^*\| \gamma \leq \\ &\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma \|\mathbf{e}^*\| \|\dot{\mathbf{q}}_t^*\| = \\ &= -k_p(1 - \gamma) \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma \|\mathbf{e}^*\| \|\dot{\mathbf{q}}_t^*\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\dot{V} \leq -W(\|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\|, \gamma(\tau)), \quad (3.118)$$

gdzie funkcja ciągła

$$W(\|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\|, \gamma(\tau)) = k_p(1 - \gamma(\tau)) \|\mathbf{e}^*(\tau)\|^2 - \gamma(\tau) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \quad (3.119)$$

jest dodatnio określona dla

$$\|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \Gamma(\tau), \quad \Gamma(\tau) = \frac{\gamma(\tau) \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\|}{k_p(1 - \gamma(\tau))}. \quad (3.120)$$

Z założenia (3.100) i postaci modelu (3.81) wynika, że $\|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$. Na podstawie twierdzenia La Salla-Yoshizawy, wszystkie trajektorie $\mathbf{e}^*(\tau)$, dla których $\|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \Gamma(\tau)$ i $\gamma(\tau) < 1$ są ograniczone i spełniają warunek:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W(\tau) = 0 \stackrel{(3.119, 3.120)}{\implies} \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{e}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = \Gamma(\tau). \quad (3.121)$$

Z (3.113) oraz (3.116) wynika, że $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau) = 0$, gdzie $\gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(\theta_1(\tau))}$. Zatem na podstawie (3.120) mamy:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma(\tau) = 0 \stackrel{(3.121)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = 0 \implies \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_2(\tau), e_3(\tau) = 0. \quad (3.122)$$

Analogicznie jak w przypadku robota jednokołowego, w okresie przejściowym może wystąpić chwila $\hat{\tau}$, w której zachodzi $\gamma(\hat{\tau}) = 1$ powodując chwilowe wstrzymanie zbieżności błędu \mathbf{e}^* (w interpretacji geometrycznej sytuacja ta odpowiada przejściu kąta $\alpha(\theta_1(\tau))$ przez wartość $\pm\pi/2$). Jednak punkt w przestrzeni stanu, dla którego zjawisko to ma miejsce nie jest przyciągający. Z definicji (3.110), (3.107) oraz (3.103), a także z wniosków (3.122) i (3.113) wynika, że:

$$\begin{aligned} \lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0} \theta_{1a}(e_2, e_3) \bmod 2\pi = \theta_{1t}(\tau) &\stackrel{(3.91, 3.104, 3.122)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = e_1(\tau) \bmod 2\pi \stackrel{(3.113)}{\implies} \\ &\stackrel{(3.113)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 2\pi d, \end{aligned} \quad (3.123)$$

gdzie $d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Skoro $\|e^*(\tau)\|, \|\dot{q}_t^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$, to z (3.107) wynika, że $\|h^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$, a z definicji (3.94) wynika, że $u_2(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Można pokazać także, iż $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_2(\tau) = u_{2t}(\tau)$. Z założeń (3.112), z wniosku $\|e^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ oraz z definicji (3.111) i założenia (3.100) wynika: $\dot{\theta}_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Łatwo sprawdzić również, że $\lim_{\|e^*\| \rightarrow 0} \dot{\theta}_{1a}(e^*) = \dot{\theta}_{1t}(\tau)$, co z kolei z wnioskiem (3.113) oraz z definicją (3.108) implikuje: $u_1(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_1(\tau) = u_{1t}(\tau)$.

□

Uwaga 3.11 Podobnie jak w przypadku robota jednokołowego, także tutaj udowodniona została jedynie asymptotyczna zbieżność błędu e^* , jednak o szybkości tej zbieżności może świadczyć prosta analiza przeprowadzona analogicznie, jak w treści uwagi 3.5. Podstawowym wnioskiem z tej analizy jest fakt, iż efektywność procesu orientowania ma kluczowe znaczenie dla szybkości zbieżności błędu e^* , czyli w tym przypadku dla szybkości zbieżności błędów e_2 oraz e_3 . Zapewnienie dużej efektywności procesu orientowania (wystarczająco duża wartość współczynnika k_1 w (3.108)) przybliży bowiem charakter zbieżności błędów e_2, e_3 do zbieżności wykładniczej (patrz uwaga 3.5). Cecha ta (charakterystyczna dla metody VFO) może zostać wykorzystana do zagwarantowania spełnienia w stanach przejściowych drugiego założenia z (3.112). Zaproponujmy zatem następującą trój etapową strategię odcinkami ciągłego sterowania mającą na celu spełnienie tego założenia (zakładamy oczywiście, że trajektoria referencyjna również je spełnia):

- E1. przed realizacją zadania śledzenia, stosując odcinkami stałe sterowania u_1, u_2 , sprowadź wartość zmiennej θ_2 wystarczająco daleko od końców przedziału $(-\varepsilon\pi/2, \varepsilon\pi/2)$ (najkorzystniej w otoczenie zera),
- E2. dla $\tau \in [0, \tau_\gamma]$ przyjmij $u_2 \equiv 0$ i zastosuj sterowanie orientujące u_1 wg (3.108) aż do osiągnięcia $\gamma(\tau_\gamma) \leq \varepsilon_\gamma$, gdzie $0 < \varepsilon_\gamma \ll 1$ jest pewnym założonym tunelem błędu nałożenia orientacji g_2^* na orientację pola h^* ; wartość k_1 w (3.108) dobierz wystarczająco dużą tak, aby minimalizować czas²¹ τ_γ ,
- E3. dla $\tau \in (\tau_\gamma, \infty)$ zastosuj pełny regulator VFO (3.108)-(3.109); po realizacji etapu E2 zbieżność θ_2 do θ_{2t} będzie miała charakter niemalże wykładniczy zapewniając spełnienie drugiego założenia z (3.112).

Uwaga 3.12 Dla $\forall \tau \geq 0 \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_{NHM}''_{mod}$, definicje (3.90) oraz (3.93), a tym samym sterowanie u_1 , nie są określone tylko w przypadku, gdy $h^*(e^*(\bar{\tau}), \cdot) = \mathbf{0} \Rightarrow e^*(\bar{\tau}) \notin \mathcal{E}_{NHM}^*$ czyli dla:

$$e_2(\bar{\tau}) \stackrel{(3.107)}{=} -\frac{\dot{\theta}_2(\bar{\tau})}{k_p} \quad \wedge \quad e_3(\bar{\tau}) \stackrel{(3.107)}{=} -\frac{\dot{\theta}_3(\bar{\tau})}{k_p}.$$

Powyższe warunki mogą potencjalnie być spełnione tylko w stanach przejściowych (w praktyce symulacyjnej są bardzo rzadkie). W takim przypadku należy podać dodatkowe definicje dla sygnałów $\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$, które będą mogły być wykorzystane w punktach $h^*(\bar{\tau}) = \mathbf{0}$ lub w otoczeniu tych punktów.

²¹W teoretycznym przypadku, gdzie ograniczenia na sygnały sterujące nie występują, wartość k_1 może być dowolnie duża lecz ograniczona. Jeżeli uwzględnimy praktyczne ograniczenia na sterowania, wówczas maksymalna wartość k_1 będzie wynikać z tych ograniczeń.

Wprowadźmy modyfikację, która pozwoli na dobre zdefiniowanie sterownika VFO dla dowolnych $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^2$ (lub równoważnie w całej dziedzinie błędu $\mathbf{e}^* \in \mathbb{R}^2$). Zaproponujemy następujące dodatkowe definicje sygnałów pomocniczych:

$$\theta_{1a}(\tau) = \theta_{1a} \stackrel{\Delta}{=} \theta_{1a}(\bar{\tau}_-), \quad (3.124)$$

$$\dot{\theta}_{1a}(\tau) = \dot{\theta}_{1a} \stackrel{\Delta}{=} 0. \quad (3.125)$$

Modyfikacja sterowania orientującego (3.108), mająca na celu dobre zdefiniowanie sterownika VFO w całej dziedzinie błędu \mathbf{e}^* , wynika teraz z następującej propozycji.

Propozycja 3.4 Dla danej trajektorii referencyjnej (3.98) oraz zakładając, że

$$\forall_{\tau \geq 0} \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$$

odcinkami ciągle prawo sterowania VFO (3.108)-(3.109), w którym:

$$\theta_{1a}(\tau), \dot{\theta}_{1a}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} (3.110), (3.111) & \text{dla } \|\mathbf{h}^*(\tau)\| > \epsilon, \\ (3.124), (3.125) & \text{dla } \|\mathbf{h}^*(\tau)\| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (3.126)$$

gdzie $0 < \epsilon < \inf_{\tau} |u_{2t}(\tau)|$ jest założonym otoczeniem punktu $\mathbf{h}^*(\tau) = \mathbf{0}$, zastosowane do systemu (3.81) pozwala na zachowanie globalnej asymptotycznej zbieżności błędów śledzenia w sensie zdefiniowanym w twierdzeniu 3.4 dla dowolnego ograniczonego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$.

Zatem definicja (3.108) jest nadal aktualna z tym, że sygnały $\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$ w niej zawarte mogą w dziedzinie czasu mieć charakter nieciągły (są ciągle w sensie C^0). W rezultacie, własność ciągłości sterowania (3.108) zostaje uchylona na rzecz ciągłości odcinkami. Zbiór punktów nieciągłości $\mathbf{h}^*(\tau) = \mathbf{0}$ jest potencjalnie osiągalny tylko w stanach przejściowych i jest nieprzyciągający.

3.2.3 Zadanie stabilizacji w punkcie

Przyjmując w definicji (3.98) zerowe wartości referencyjnych sygnałów wejściowych $u_{1t} = u_{2t} \equiv 0$ otrzymamy zdegenerowaną trajektorię typu T4 w postaci stałego punktu referencyjnego:

$$\mathbf{q}_t \stackrel{(3.98)}{=} \begin{bmatrix} \theta_{1t}(0) \\ \theta_{2t}(0) \\ \theta_{3t}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{1t} \\ \theta_{2t} \\ \theta_{3t} \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}_{NHMmod}'' \subset \mathbb{R}^3. \quad (3.127)$$

Zdefiniujemy błąd stabilizacji:

$$\mathbf{e}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ e_2(\tau) \\ e_3(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{q}_t - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} \theta_{1t} - \theta_1(\tau) \\ \theta_{2t} - \theta_2(\tau) \\ \theta_{3t} - \theta_3(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.128)$$

Dla stałego punktu referencyjnego (3.127) uogólniona prędkość referencyjna $\dot{\mathbf{q}}_t(\tau)$ z (3.101) jest równa zero. Jednak prędkość $\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \in \mathbb{R}^2$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \stackrel{(3.101)}{=} \begin{bmatrix} \sin \theta_{1t}(\tau) \\ \cos \theta_{1t}(\tau) \cos \theta_{2t}(\tau) \end{bmatrix} u_{2t}(\tau) \stackrel{(3.127)}{=} \begin{bmatrix} \sin \theta_{1t} \\ \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \end{bmatrix} \cdot 0 = \mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t}) \cdot 0, \quad (3.129)$$

gdzie $u_{2t}(\tau) \equiv 0$, ale $\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t}) \neq \mathbf{0} \forall \theta_{1t,2t} \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$. Oznacza to, że pole $\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t}) \in \mathbb{R}^2$ nie degeneruje się w punkcie referencyjnym (3.127) i w rzeczywistości definiuje referencyjną orientację (oraz kierunek) pola w punkcie $\mathbf{q}_t^* = [\theta_{2t} \ \theta_{3t}]^T \in \mathbb{R}^2$. Własność tę wykorzystamy do konstrukcji pola zbieżności \mathbf{h}^* dla przypadku stabilizacji w punkcie poprzez analogię do definicji (3.107).

Wprowadźmy tzw. *wirtualną prędkość referencyjną* postaci:

$$\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{2vt}(\tau) \\ \dot{\theta}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t}) = \delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \begin{bmatrix} \sin \theta_{1t} \\ \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.130)$$

gdzie $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$ jest funkcją ciągłą taką, że $\delta(\mathbf{e}^* = \mathbf{0}) = 0$. Z porównania (3.130) i (3.101) wynika, iż wirtualna prędkość referencyjna $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau)$ różni się od rzeczywistej prędkości referencyjnej $\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)$ tym, że zamiast zerowego (w tym przypadku) sterowania referencyjnego $u_{2t} \equiv 0$ wykorzystuje pewną funkcję $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$, która zmierza do zera w granicy dla $\mathbf{e}^*(\tau) \rightarrow \mathbf{0}$. Wprowadzenie funkcji $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$ pozwala na odpowiednie kształtowanie stanów przejściowych systemu sterowanego i zbieżność zmiennej θ_1 do wartości referencyjnej θ_{1t} . Proponuje się następującą definicję (dla $\mathbf{q}_t \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$):

$$\delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \triangleq \frac{-\eta \operatorname{sgn}(k)}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t})\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \stackrel{(3.129)}{=} \frac{-\eta \operatorname{sgn}(k)}{\sqrt{\sin^2 \theta_{1t} + \cos^2 \theta_{1t} \cos^2 \theta_{2t}}} \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \quad 0 < \eta < k_p, \quad (3.131)$$

gdzie η jest dodatkowym współczynnikiem projektowym, a $k = k(\tau)$ jest funkcją skalarną występującą w relacjach (2.11) oraz (3.89). Ze względu na to, że dla referencyjnej trajektorii zdegenerowanej $u_{2t} \equiv 0$, zmodyfikujemy postulat (3.105) na rzecz następującego założenia:

$$\operatorname{sgn}(k(\mathbf{e}^*(\tau), \cdot)) \triangleq \operatorname{sgn}(e_{30}), \quad (3.132)$$

gdzie $e_{30} \equiv e_3(0)$ stanowi początkową wartość błędu stabilizacji $e_3(\tau)$. Podobnie jak w przypadku zadania śledzenia trajektorii ustawicznie pobudzających, znak funkcji $k(\tau)$ będzie determinował strategię ewolucji systemu (*ruch do przodu/do tyłu*) w stanach przejściowych, lecz tym razem wybór strategii zależy od początkowej pozycji trzeciego ogniwa manipulatora względem pozycji referencyjnej.

Podstawiając teraz (3.131) do (3.130) z uwzględnieniem (3.132) otrzymujemy interesującą nas postać wirtualnej prędkości referencyjnej:

$$\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{2vt}(\tau) \\ \dot{\theta}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq -\frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t})\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \begin{bmatrix} \sin \theta_{1t} \\ \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.133)$$

Wirtualne przyspieszenie referencyjne wynika bezpośrednio z różniczkowania (3.133):

$$\ddot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{2vt}(\tau) \\ \ddot{\theta}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} = -\frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t,2t})\|} \frac{\mathbf{e}^{*T}(\tau) \dot{\mathbf{e}}^*(\tau)}{\|\mathbf{e}^*(\tau)\|} \begin{bmatrix} \sin \theta_{1t} \\ \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.134)$$

W tym momencie możemy zaproponować postać pola \mathbf{h}^* . Przyjmijmy następującą definicję:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \stackrel{(3.88)}{=} \begin{bmatrix} h_2(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \\ h_3(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \end{bmatrix} \triangleq k_p \mathbf{e}^*(\tau) + \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) = \begin{bmatrix} k_p e_2(\tau) + \dot{\theta}_{2vt}(\tau) \\ k_p e_3(\tau) + \dot{\theta}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.135)$$

gdzie $k_p > 0$ jest parametrem projektowym. Podstawiając (3.133) do definicji (3.135) otrzymamy postać pola $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^2$ dla zadania stabilizacji w punkcie:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) = \begin{bmatrix} k_p e_2(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t}, 2t)\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \sin \theta_{1t} \\ k_p e_3(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t}, 2t)\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Pełna postać pola zbieżności dla zadania stabilizacji jest następująca (por. (3.106)):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(e_{1a}, \dot{\theta}_{1a}, \mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*) &\stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{\theta}_{1a}(\tau) \\ k_p e_2(\tau) + \dot{\theta}_{2vt}(\tau) \\ k_p e_3(\tau) + \dot{\theta}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.133)}{=} \\ &\stackrel{(3.133)}{=} \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{\theta}_{1a}(\tau) \\ k_p e_2(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t}, 2t)\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \sin \theta_{1t} \\ k_p e_3(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(\theta_{1t}, 2t)\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Od tej chwili strategia VFO z podrozdziałów 3.2.1 oraz 3.2.2 pozostaje niezmienną. Jedynymi różnicami między sterownikami VFO dla zadania śledzenia i zadania stabilizacji są inne definicje znaku funkcji $k(\tau)$ i postać pola \mathbf{h}^* (por. (3.132), (3.135) z (3.105), (3.107)).

STEROWNIK 4 Uwzględniając definicję (3.136), postać sterownika VFO (3.92)-(3.97) dla zadania stabilizacji w punkcie jest następująca (zakładając, że: $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$ oraz $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$):

$$u_1 \stackrel{(3.92)}{=} k_1(\theta_{1a} - \theta_1) + \dot{\theta}_{1a}, \quad (3.137)$$

$$u_2 \stackrel{(3.97)}{=} \frac{(k_p e_2 + \dot{\theta}_{2vt}) \sin \theta_1 + (k_p e_3 + \dot{\theta}_{3vt}) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}, \quad (3.138)$$

gdzie postać zmiennej θ_{1a} wynika z (3.90), (3.136) oraz (3.132):

$$\theta_{1a} \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{Atan}2c \left(\operatorname{sgn}(e_{30})(k_p e_2 + \dot{\theta}_{2vt}) \cos \theta_2, \operatorname{sgn}(e_{30})(k_p e_3 + \dot{\theta}_{3vt}) \right) \in \mathbb{R}, \quad (3.139)$$

postać $\dot{\theta}_{1a}$, na podstawie (3.93) oraz (3.135), wyraża się za pomocą wzoru:

$$\dot{\theta}_{1a} = \frac{(\dot{h}_2 h_3 - h_2 \dot{h}_3) \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2 h_2 h_3 \sin \theta_2}{h_3^2 + h_2^2 \cos^2 \theta_2}, \quad (3.140)$$

w którym

$$\begin{aligned} h_2 &\stackrel{(3.135)}{=} k_p(\theta_{2t} - \theta_2) + \dot{\theta}_{2vt}, & \Rightarrow & \dot{h}_2 = -k_p \dot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_{2vt}, \\ h_3 &\stackrel{(3.135)}{=} k_p(\theta_{3t} - \theta_3) + \dot{\theta}_{3vt}, & \Rightarrow & \dot{h}_3 = -k_p \dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_{3vt}, \end{aligned}$$

a wirtualne sygnały referencyjne $\dot{\theta}_{2vt}, \dot{\theta}_{3vt}$ oraz $\ddot{\theta}_{2vt}, \ddot{\theta}_{3vt}$ wynikają z (3.133)-(3.134). ♣

Twierdzenie 3.5 Dany jest stały punkt referencyjny (3.127) oraz obszar w dziedzinie błędu stabilizacji $\mathcal{E}^* \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Zakładając, że $\forall \tau \geq 0 \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$ oraz:

$$\forall 0 \leq \tau < \infty \quad \mathbf{e}^*(\tau) \in \mathcal{E}^*, \quad (3.141)$$

prawo sterowania VFO (3.137)-(3.138) zastosowane do systemu (3.81) globalnie asymptotycznie prawie stabilizuje błąd (3.128) w zbiorze \mathcal{E}_0 w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau), e_2(\tau), e_3(\tau) = 0$$

dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{E}^*$.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.4 rozważmy zachowanie zmiennej orientującej θ_1 i pomocniczego błędu orientacji e_{1a} . Podstawienie (3.137) do (3.81) daje równanie

$$(\dot{\theta}_{1a} - \dot{\theta}_1) + k_1(\theta_{1a} - \theta_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_{1a} + k_1 e_{1a} = 0,$$

z którego wynika, że błąd e_{1a} zmierza wykładniczo do zera dla $\tau \rightarrow \infty$:

$$e_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_1(\tau) = \theta_{1a}(\tau). \quad (3.142)$$

Sterowanie orientujące (3.137) gwarantuje zatem spełnienie warunku orientowania (3.89).

Rozważmy zachowanie błędu e^* . Na podstawie (3.128) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = -\dot{q}^*. \quad (3.143)$$

Dodając i odejmując z prawej strony powyższego równania pole h^* z definicji (3.135) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = -\dot{q}^* + h^* - k_p e^* - \dot{q}_{vt}^*,$$

co po uporządkowaniu daje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{e}^* + k_p e^* = r - \dot{q}_{vt}^*, \quad \text{gdzie} \quad r \triangleq h^* - \dot{q}^*. \quad (3.144)$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.4 skorzystamy z następujących relacji (Dodatek B.2):

$$\|r\|^2 = \|h^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (3.145)$$

gdzie $\cos \alpha$ jest zdefiniowany w (3.96) oraz

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} (1 - \cos^2 \alpha(\theta_1)) = 0. \quad (3.146)$$

Zaproponujmy teraz dodatnio określoną funkcję klasy \mathcal{K}_∞ :

$$V(e^*) \triangleq \frac{1}{2} e^{*T} e^* \in \mathcal{K}_\infty, \quad (3.147)$$

której pochodną można oszacować następująco (dla prostoty zapisu przyjmijmy:

$\gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(\theta_1(\tau))} \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{e}^{*T} \dot{\mathbf{e}}^* \stackrel{(3.144)}{=} \mathbf{e}^{*T} [-k_p \mathbf{e}^* + \mathbf{r} - \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*] = \\
&\stackrel{(3.130)}{=} \mathbf{e}^{*T} [-k_p \mathbf{e}^* + \mathbf{r} - \delta(\mathbf{e}^*) \mathbf{g}_{2t}^*] = \\
&= -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \mathbf{e}^{*T} \mathbf{r} - \delta(\mathbf{e}^*) \mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* \leq \\
&\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{r}\| + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| = \\
&\stackrel{(3.145)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{h}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| = \\
&\stackrel{(3.135)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|k_p \mathbf{e}^* + \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \leq \\
&\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| = \\
&\stackrel{(3.130)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \gamma + |\delta(\mathbf{e}^*)| \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| = \\
&\stackrel{(3.131)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \eta \gamma \|\mathbf{e}^*\|^2 + \eta \|\mathbf{e}^*\|^2 = \\
&= -[k_p(1 - \gamma) - \eta(1 + \gamma)] \|\mathbf{e}^*\|^2 = -\zeta(\gamma(\tau)) \|\mathbf{e}^*\|^2.
\end{aligned}$$

Powyższa pochodna jest określona ujemnie, gdy $\zeta(\gamma(\tau))$ jest określone dodatnio, co pozwala zapisać warunek asymptotycznej zbieżności błędu \mathbf{e}^* :

$$\zeta(\gamma(\tau)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\tau) < \frac{k_p - \eta}{k_p + \eta}. \quad (3.148)$$

Z uwagi na (3.131), (3.146) oraz (3.142) wnioskuje się, że:

$$\exists \tau_\gamma < \infty : \forall \tau \geq \tau_\gamma \quad \gamma(\tau) < \frac{k_p - \eta}{k_p + \eta} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{e}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = 0. \quad (3.149)$$

Dodatkowo dla $\tau \geq \tau_\gamma$ zbieżność $\|\mathbf{e}^*(\tau)\|$ do zera ma charakter wykładniczy, ponieważ:

$$\forall \tau \geq \tau_\gamma \quad \left\{ \dot{V}(\tau) \leq -2\zeta V(\tau) \Rightarrow V(\tau) \leq V_0 \exp(-2\zeta\tau) \Rightarrow \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \|\mathbf{e}^*(0)\| \exp(-2\zeta\tau) \right\}.$$

Pokażemy teraz, że także błąd stabilizacji pierwszego ogniwa manipulatora e_1 zmierza do zera. W tym celu przeanalizujemy zachowanie zmiennej θ_1 w przypadku, gdy wektor \mathbf{q}^* zbiega w otoczenie punktu $\mathbf{q}_t^* = [\theta_{2t} \ \theta_{3t}]^T$, czyli w granicy dla $e_2, e_3 \rightarrow 0$.

Można pomocniczo wykazać, że prawdziwe są następujące relacje (Dodatek B.2):

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \begin{cases} \dot{\theta}_2(\theta_1) = h_2, \\ \dot{\theta}_3(\theta_1) = h_3. \end{cases} \stackrel{(3.143)}{\implies} \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \begin{cases} \dot{e}_2(\theta_1) = -h_2, \\ \dot{e}_3(\theta_1) = -h_3. \end{cases} \quad (3.150)$$

Z modelu (3.81) wynika także, iż tangens kąta pierwszego ogniwa manipulatora określony jest następującym ilorazem: $\tan \theta_1 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 / \dot{\theta}_3$. Korzystając z zależności (3.150) oraz z ogólnej postaci pola (3.135) możemy zapisać co następuje:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \tan \theta_1 &\stackrel{(3.150)}{=} \frac{h_2 \cos \theta_2}{h_3} \stackrel{(3.135)}{=} \frac{k_p e_2 - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*\|} \|\mathbf{e}^*\| \sin \theta_{1t}}{k_p e_3 - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*\|} \|\mathbf{e}^*\| \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}} \cos \theta_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \tan \theta_1 = \frac{\nu \frac{e_2}{\|\mathbf{e}^*\|} + \sin \theta_{1t}}{\nu \frac{e_3}{\|\mathbf{e}^*\|} + \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}} \cos \theta_2,
\end{aligned}$$

gdzie $\nu \triangleq -\frac{k_p \|g_{2t}^*\|}{\eta \operatorname{sgn}(e_{30})}$. W otoczeniu punktu $\mathbf{q}_t^* = [\theta_{2t} \ \theta_{3t}]^T$, czyli w granicy dla $\lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0}$ powyższa relacja przyjmuje postać:

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}, e_2, e_3 \rightarrow 0} \tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_{1t}}{\cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}} \cos \theta_{2t} \Rightarrow \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}, e_2, e_3 \rightarrow 0} \tan \theta_1 = \tan \theta_{1t}.$$

Uzyskany wynik nie gwarantuje jeszcze, że $\theta_1 \rightarrow \theta_{1t}$, bowiem powyższa relacja jest słuszna także, gdy $\theta_1 = \theta_{1t} \pm \pi$. Aby udowodnić zbieżność zmiennej θ_1 do wartości referencyjnej θ_{1t} , wystarczy dodatkowo pokazać, że w granicy dla $\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}$, $e_2, e_3 \rightarrow 0$ spełniona jest nierówność $\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* > 0$. Spełnienie nierówności wykazano w dodatku B.2. Ostatecznie zatem wnioskujemy, iż w otoczeniu punktu $\mathbf{q}_t^* = [\theta_{2t} \ \theta_{3t}]^T$ kąt pierwszego ogniwa manipulatora $\theta_1(\tau)$ asymptotycznie zmierza do wartości referencyjnej θ_{1t} . Tym samym błąd stabilizacji $e_1(\tau)$ asymptotycznie zmierza do zera:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0. \quad (3.151)$$

Z (3.136) i (3.149) wynika, że: $\|\mathbf{h}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^*(\tau)\| = 0$. Zatem z (3.138) (lub z (3.94)) wynika, że: $u_2(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\|e^*\| \rightarrow 0} u_2(e^*(\tau)) = 0$. Z założenia, że $\forall_{\tau \geq 0} \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$ oraz z (3.141), a także z wniosku, że $\|\dot{e}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ wynika, iż $\forall_{e^* \neq \mathbf{0}} \dot{\theta}_{1a}(e^*(\tau)) \in \mathcal{L}_\infty$. Uwzględnienie teraz wniosków (3.142) i (3.151) wraz z definicją (3.137) implikuje: $u_1(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. □

Uwaga 3.13 Zakładając, że $\forall_{\tau \geq 0} \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$, definicje (3.139) oraz (3.140) nie są określone jedynie w punkcie $e^* = \mathbf{0}$ (czyli dla $e_2, e_3 = 0$). Spełnienie założenia $\|e^*(0)\| \neq 0$ oraz warunku zbieżności z (3.149) gwarantuje, iż punkt $e^* = \mathbf{0}$ nie zostanie osiągnięty w skończonym czasie. W takim przypadku nie ma potrzeby wprowadzania dodatkowych definicji sygnałów $\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$ w tym punkcie. Założenie $\|e^*(0)\| \neq 0$ nie powoduje utraty ogólności rozważań, gdyż zawsze istnieje pewne sterowanie w torze otwartym, np. $u_1 = 0, u_2 = \text{const}$, które wyprowadza system (3.81) w skończonym czasie z punktu²² $e^* = \mathbf{0}$. Spełnienie warunku zbieżności z (3.149) wynika z kolei z efektywności procesu orientowania pola \mathbf{g}_2^* . Zatem aby zagwarantować wykładniczy charakter ewolucji błędu e^* , zaproponujemy następującą dwuetapową strategię sterowania:

- E1. dla $\tau \in [0, \tau_\gamma]$ przyjmij $u_2 \equiv 0$ i zastosuj sterowanie orientujące u_1 wg (3.137) aż do osiągnięcia przez γ wartości mniejszej od $\frac{k_p - \eta}{k_p + \eta}$; w tym etapie zachodzi: $\forall_{\tau \leq \tau_\gamma} e^*(\tau) \equiv e^*(0)$,
- E2. dla $\tau \in (\tau_\gamma, \infty)$ zastosuj pełny stabilizator VFO (3.137)-(3.138); w tym etapie zachodzi: $\forall_{\tau > \tau_\gamma} \|e^*(\tau)\| \leq \|e^*(0)\| \exp(-2\zeta\tau)$.

Stabilizator VFO, który nie wymaga dodatkowych definicji sygnałów $\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$ w punkcie stabilizacji $e^* = \mathbf{0}$ i nie jest w tym punkcie zdefiniowany należy do klasy prawie stabilizatorów (patrz uwaga 3.7).

²²Cały czas zakładamy, że $\forall_{\tau \geq 0} \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$.

Wprowadzimy teraz modyfikację, która pozwoli na dobre zdefiniowanie stabilizatora VFO w całej dziedzinie błędu $\mathbf{e}^* \in \mathbb{R}^2$. W tym celu zaproponujemy następujące dodatkowe definicje sygnałów $\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$:

$$\theta_{1a}(\tau) = \theta_{1a} \stackrel{\Delta}{=} \theta_{1t}, \quad (3.152)$$

$$\dot{\theta}_{1a}(\tau) = \dot{\theta}_{1a} \stackrel{\Delta}{=} \dot{\theta}_{1t} \stackrel{(3.127)}{=} 0. \quad (3.153)$$

Modyfikacja stabilizatora (3.137)-(3.138) wynika teraz z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.6 *Dany jest stały punkt referencyjny (3.127). Przy założeniu, że $\forall \tau \geq 0 \quad \mathbf{q}(\tau) \in \mathcal{Q}_{NHMmod}''$, odcinkami ciągle prawo sterowania VFO (3.137)-(3.138), w którym:*

$$\theta_{1a}(\tau), \dot{\theta}_{1a}(\tau), u_2(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} (3.139), (3.140), (3.138) & \text{dla } \|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \epsilon, \\ (3.152), (3.153), 0 & \text{dla } \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (3.154)$$

gdzie $\epsilon \geq 0$ jest założonym otoczeniem punktu $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$, zastosowane do systemu (3.81) zapewnia globalną stabilizację błędu (3.128) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon, \quad e_1(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon$$

dla dowolnego ograniczonego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$. Dla $\epsilon = 0$ stabilizacja ma charakter asymptotyczny, a dla $\epsilon > 0$ – praktyczny.

Dowód. Przyjmując $\epsilon = 0$ wszystkie wnioski z twierdzenia 3.5 pozostają w mocy z tym, że dodatkowo dla $\|\mathbf{e}^*\| = 0$ otrzymujemy:

$$\theta_{1a} \stackrel{(3.154)}{=} \theta_{1t}, \quad \dot{\theta}_{1a} \stackrel{(3.154)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(\tau) \stackrel{(3.137)}{=} k_1(\theta_{1t} - \theta_1(\tau)).$$

Po podstawieniu powyższej zależności do (3.81) mamy:

$$\dot{\theta}_1 + k_1\theta_1 = k_1\theta_{1t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_1(\tau) = \theta_{1t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0.$$

Dla $\epsilon > 0$ rozważymy dwa przypadki: $\|\mathbf{e}^*(0)\| > \epsilon$ oraz $\|\mathbf{e}^*(0)\| \leq \epsilon$. Gdy $\|\mathbf{e}^*(0)\| > \epsilon$, wówczas korzystając z twierdzenia 3.5 możemy zapisać:

$$\exists \tau_\epsilon < \infty : \|\mathbf{e}^*(\tau_\epsilon)\| = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \forall \tau \geq \tau_\epsilon \quad u_2(\tau) = 0, \quad u_1(\tau) = k_1(\theta_{1t} - \theta_1(\tau)),$$

zatem z modelu (3.81) oraz definicji (3.127) bezpośrednio wynika, że

$$\forall \tau \geq \tau_\epsilon \quad \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = \epsilon \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| = \epsilon.$$

Z kolei, gdy $\|\mathbf{e}^*(0)\| \leq \epsilon$ wówczas $\tau_\epsilon = 0$ oraz:

$$\forall \tau \geq 0 \quad u_2(\tau) = 0, \quad u_1(\tau) = k_1(\theta_{1t} - \theta_1(\tau))$$

i podobnie jak w poprzednim przypadku możemy stwierdzić co następuje:

$$\forall \tau \geq 0 \quad \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon. \quad \square$$

Postać sterowania orientującego (3.137) pomimo modyfikacji (3.154) jest nadal aktualna z tą jedynie różnicą, że sygnały $\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$ w niej zawarte są ciągle jedynie w sensie C^0 .

3.2.4 Wyniki badań symulacyjnych

Efektywność działania sterownika VFO zilustrowano wynikami symulacji numerycznych. Wszystkie obliczenia przeprowadzono dla zmiennego kroku całkowania metodą *ODE45* (*Dormand-Prince*) w horyzoncie czasowym $\tau \in [0, T]$, $T = 5[s]$. Podczas symulacji, sygnały prędkości $\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ sterowanego systemu występujące w definicjach (3.111) oraz (3.140) były obliczane zgodnie z równaniem (3.81).

I. Śledzenie trajektorii. Zadanie śledzenia trajektorii referencyjnej typu T3 generowanej w oparciu o równanie (3.98) zrealizowano za pomocą ciągłego sterownika (3.108)-(3.109) przy założeniach (3.112). Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sin 0.5\tau + 0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) \triangleq \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

gdzie u_{1t} i u_{2t} wyrażone są w $[rad/s]$, a $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ w $[rad]$. Zgodnie z interpretacją geometryczną, zdefiniowana trajektoria referencyjna jest trajektoria popychająco-orientującą. Przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5$, $k_1 = 10$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.51-3.55. Ścieżka referencyjna końcówki roboczej oraz wynikowa ścieżka końcówki sterowanego manipulatora pokazane zostały na rys. 3.56, gdzie zaznaczono również początkową $\mathbf{q}(0)$, końcową $\mathbf{q}(T)$ i kilka pośrednich konfiguracji ramienia robota (konfiguracje pośrednie wykreślono z odstępem czasowym co $0.5[s]$).

II. Stabilizacja w punkcie. Zadanie stabilizacji w punkcie lub inaczej zadanie śledzenia referencyjnej trajektorii (3.98) zdegenerowanej do stałego punktu referencyjnego (typ trajektorii T4) zrealizowano wykorzystując *prawie stabilizator* (3.137)-(3.138). Aby pokazać uniwersalność sterownika (3.137)-(3.138), symulacje przeprowadzono dla dwóch różnych stałych punktów referencyjnych: zerowego i niezerowego. W pierwszym przypadku wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) = \mathbf{q}_t \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ wyrażone są w $[rad]$. Zgodnie z interpretacją geometryczną, zdegenerowana trajektoria referencyjna T4 odpowiada stałej konfiguracji manipulatora z wyprostowanymi wszystkimi ogniwami umieszczonymi prostoliniowo wzdłuż osi x globalnego układu współrzędnych. Podczas symulacji przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5$, $k_1 = 10$ oraz $\eta = 3$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.57-3.61. Wynikowa ścieżka końcówki sterowanego manipulatora pokazana została na rys. 3.62, gdzie zaznaczono również początkową $\mathbf{q}(0)$, końcową $\mathbf{q}(T)$ i kilka pośrednich konfiguracji ramienia robota (konfiguracje pośrednie wykreślono z odstępem czasowym co $0.25[s]$).

Kolejny zestaw wyników symulacyjnych dotyczy zadania stabilizacji z zadaniem niezerowym punktem referencyjnym \mathbf{q}_t . W tym przypadku wybrano:

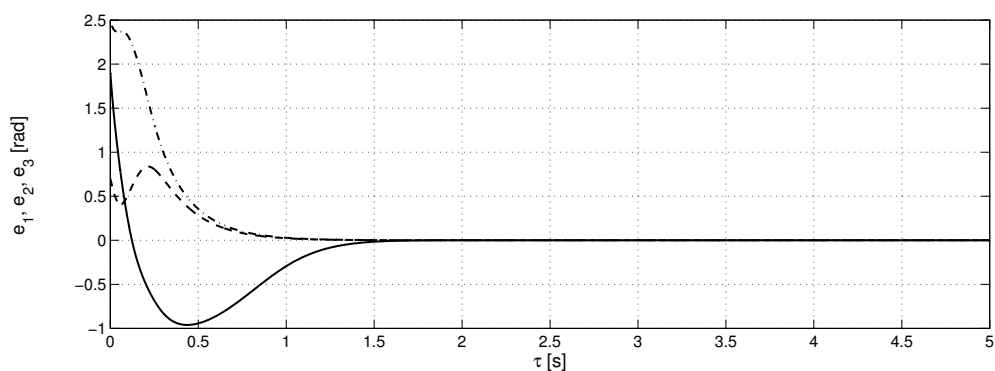
$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) = \mathbf{q}_t \triangleq \begin{bmatrix} 0.52 \\ -0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{q}_t(0), \mathbf{q}(0)$ wyrażone są w $[rad]$. Podczas symulacji przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5, k_1 = 10, \eta = 3$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiono na rys. 3.63-3.67, a wynikową ścieżkę robota w przestrzeni zadania na rys. 3.68.

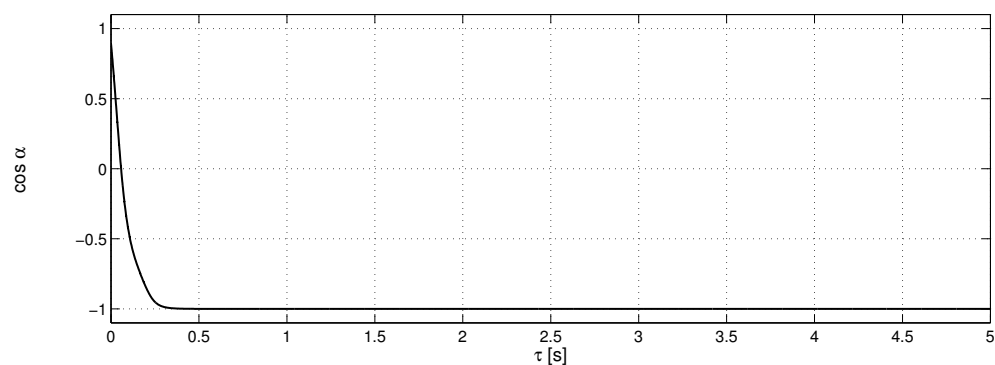
Wpływ wartości poszczególnych parametrów projektowych k_p, k_1 oraz η na jakość stanów przejściowych dla zadania stabilizacji, przedstawiają dodatkowo rys. 3.69-3.71.

3.2.5 Podsumowanie

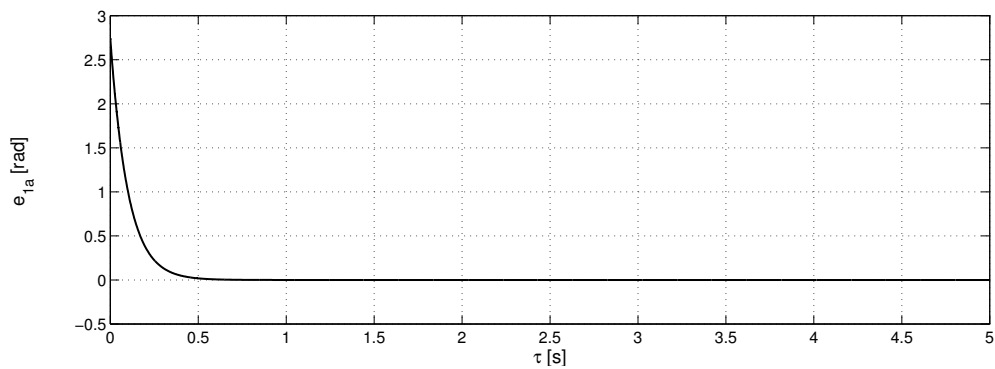
Powyżej przedstawiono zastosowanie metody orientowania pól wektorowych dla modelu manipulatora z przekładniami nieholonomicznymi i trzema ogniwami. Zaproponowane postaci sterowników VFO gwarantują globalne rozwiązanie dwóch zadań sterowania: asymptotyczne śledzenie dopuszczalnych trajektorii zmiennych w czasie oraz asymptotyczną (a także praktyczną) stabilizację w punkcie. Podobnie jak w przypadku robota jednokołowego, zaproponowano dwa rodzaje praw sterowania dla każdego z zadań: ciągłe sterowniki VFO wyłączające jednak pewne punkty z dziedziny błędu \mathbf{e} oraz odcinkami ciągłe sterowniki VFO dobrze określone w całej dziedzinie błędu regulacji \mathbf{e} . Struktury przedstawionych ciągłych sterowników VFO dedykowanych do zadania śledzenia i zadania stabilizacji są jednakowe. Jedyna różnica między nimi wynika z postaci pola wektorowego zbieżności \mathbf{h} i sposobu określania znaku funkcji $k(\tau)$. Uzyskane wyniki symulacyjne pokazują efektywność działania przedstawionych algorytmów VFO. Poprzez analogie wynikające z interpretacji geometrycznej, otrzymane rezultaty mogą zostać porównane z wynikami uzyskanymi dla kanonicznego przykładu robota jednokołowego. Dzięki takim analogiom, wpływ wartości parametrów projektowych na jakość stanów przejściowych w układzie sterowania manipulatorem staje się zrozumiały i wręcz intuicyjny, co ma duże znaczenie praktyczne.



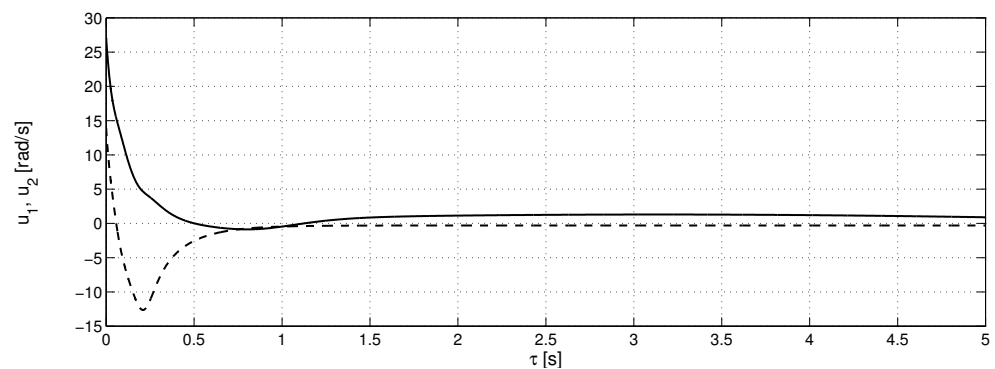
Rys. 3.51: Σ_{NHMmod} : trajektoria T3 – błędy śledzenia: e_1 (-), e_2 (- -), e_3 (-.-).



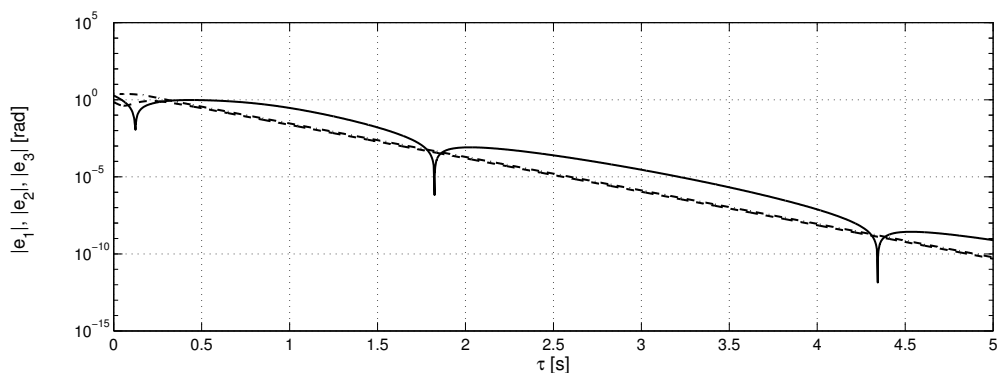
Rys. 3.52: Σ_{NHMmod} : trajektoria T3 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



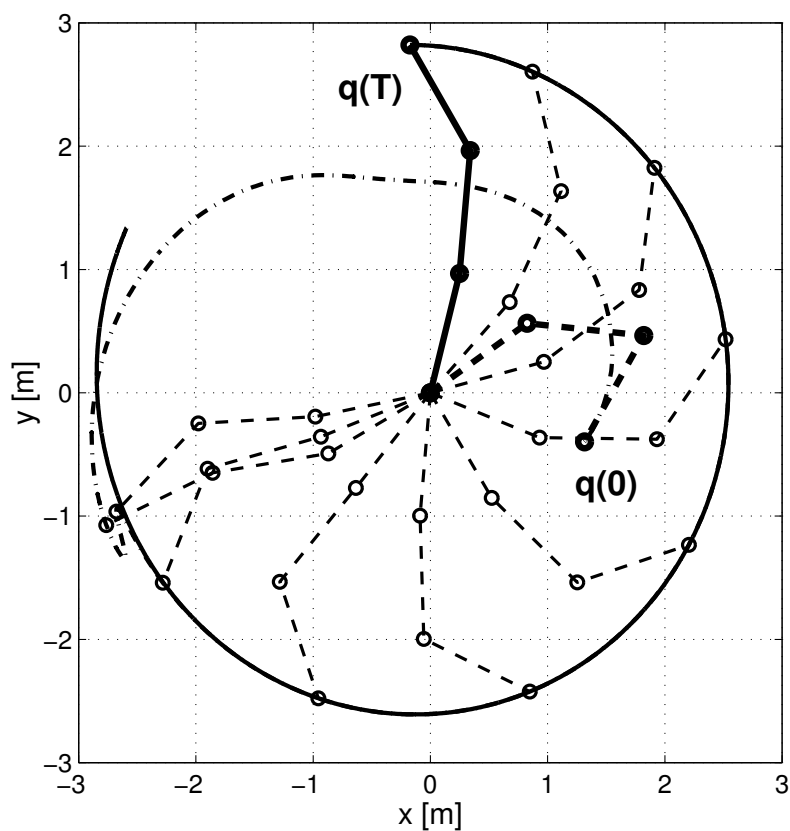
Rys. 3.53: Σ_{NHMmod} : trajektoria T3 – pomocniczy błąd orientacji e_{1a} .



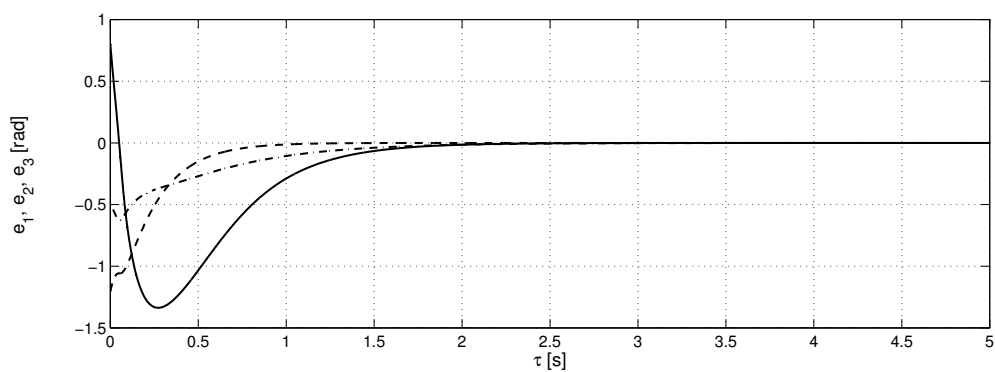
Rys. 3.54: Σ_{NHMmod} : trajektoria T3 – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



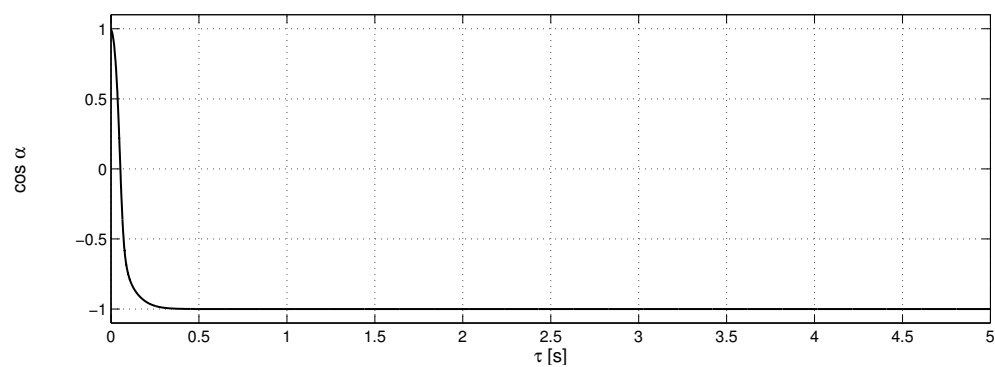
Rys. 3.55: Σ_{NHMmod} : trajektoria T3 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_1|$ (—), $|e_2|$ (---), $|e_3|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



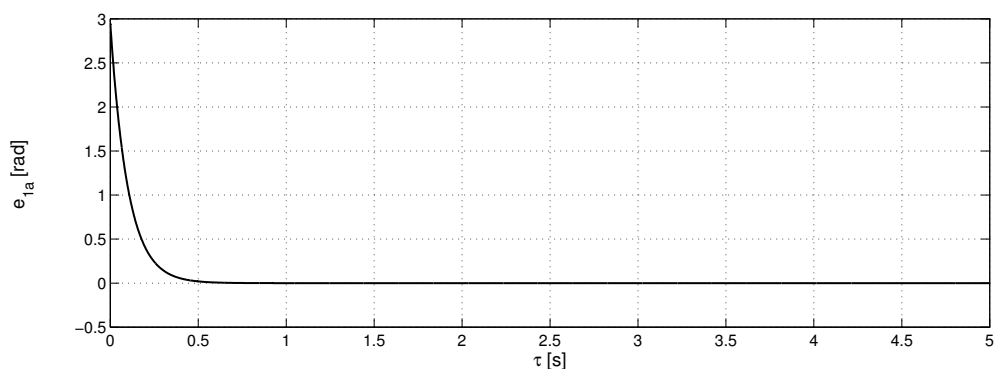
Rys. 3.56: Σ_{NHMmod} : trajektoria T3 – ścieżka kreślona przez końcówkę robota i ścieżka referencyjna (linia ciągła) końcówki w przestrzeni zadania (zaznaczono początkową $q(0)$ i końcową $q(T)$ konfigurację sterowanego manipulatora oraz kilka konfiguracji stanu przejściowego – kreślone co 0.5[s]; przyjęto jednostkowe długości ogniw manipulatora).



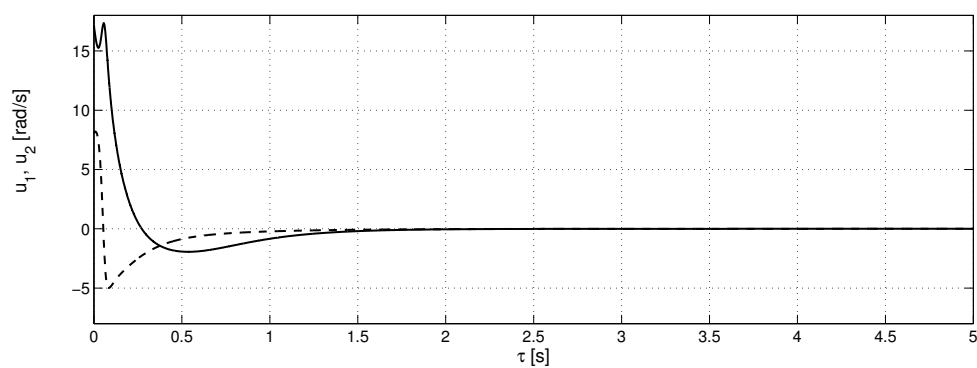
Rys. 3.57: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – błędy stabilizacji: e_1 (-), e_2 (- -), e_3 (-.-).



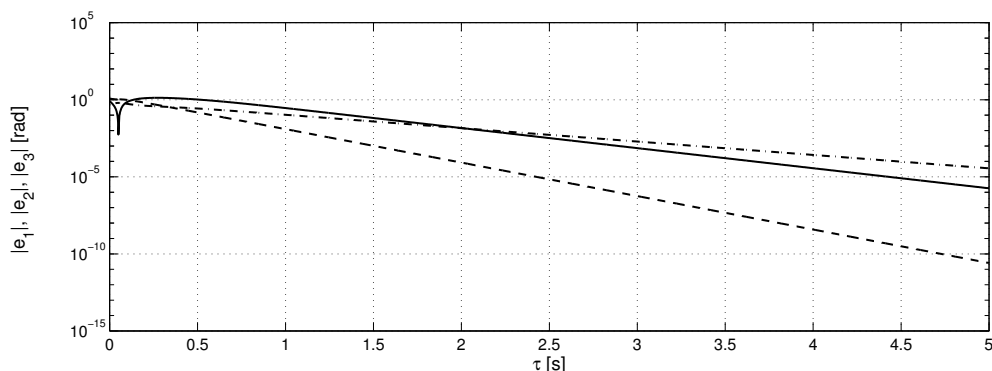
Rys. 3.58: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



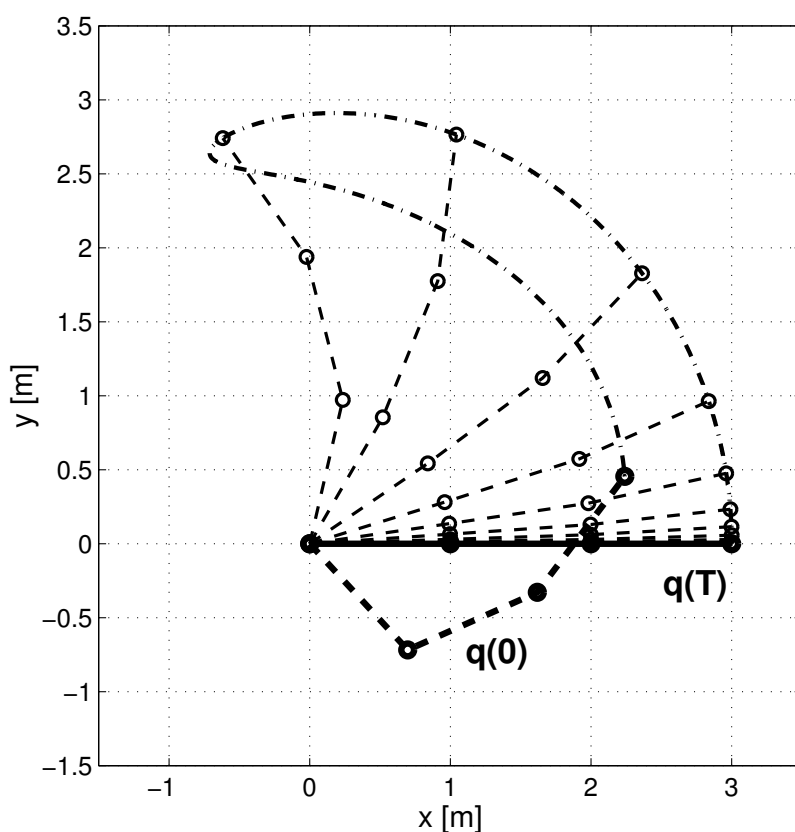
Rys. 3.59: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – pomocniczy błąd orientacji e_{1a} .



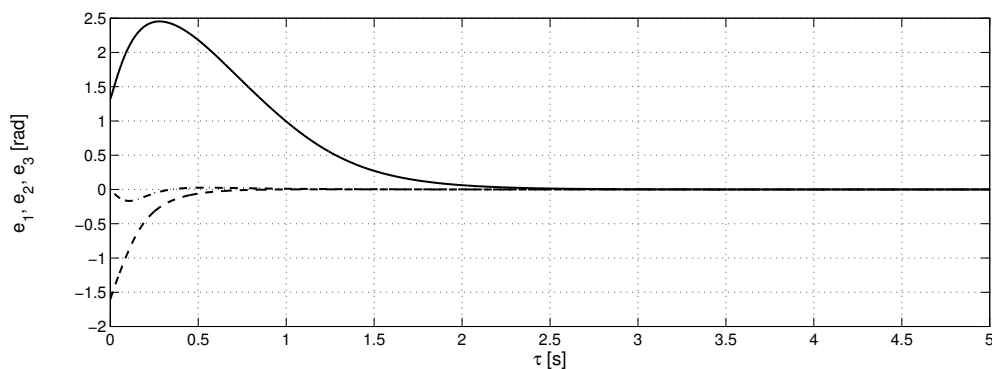
Rys. 3.60: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



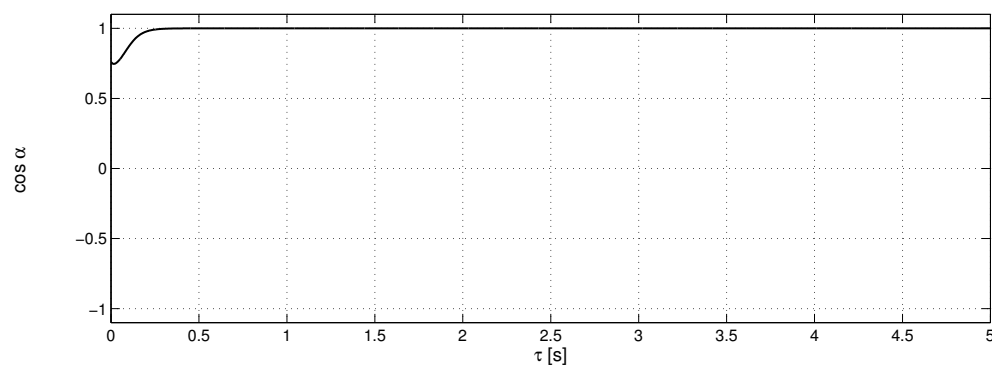
Rys. 3.61: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (zerowy punkt referencyjny) – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_1|$ (—), $|e_2|$ (---), $|e_3|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



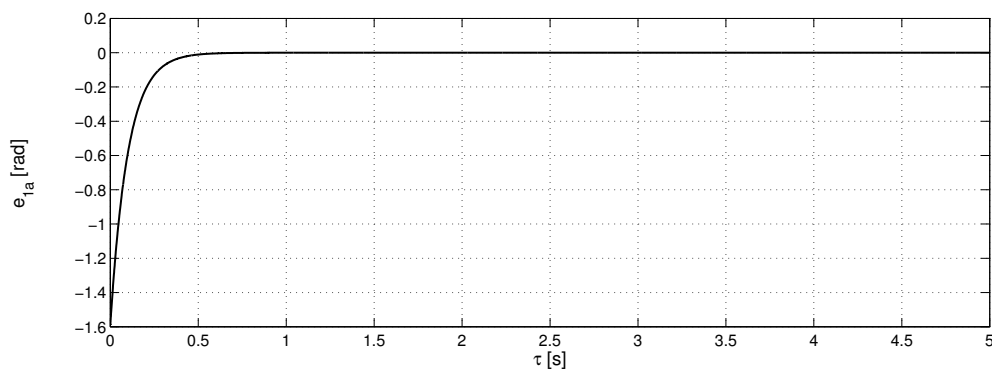
Rys. 3.62: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny $q_t \triangleq \mathbf{0}$) – ścieżka kreślona przez końcówkę robota w przestrzeni zadania w stanie przejściowym (zaznaczono początkową $q(0)$ i końcową $q(T)$ konfigurację sterowanego manipulatora oraz kilka konfiguracji stanu przejściowego – kreślone co $0.25[s]$; przyjęto jednostkowe długości ogniw manipulatora).



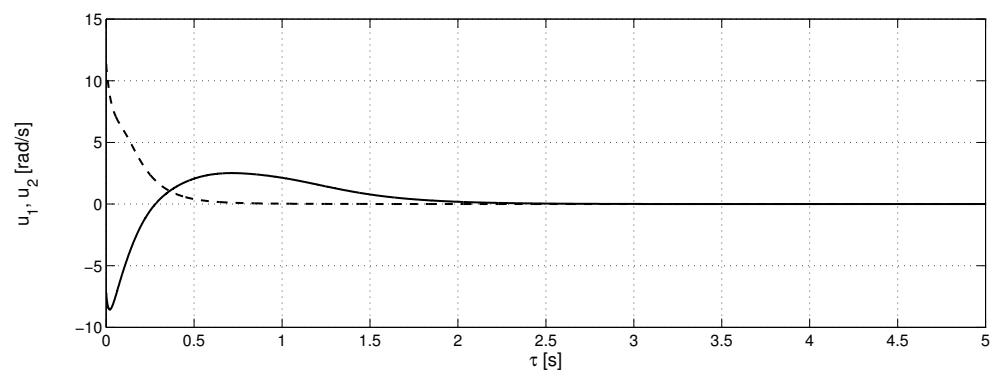
Rys. 3.63: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – błędy stabilizacji: e_1 (—), e_2 (---), e_3 (-.-).



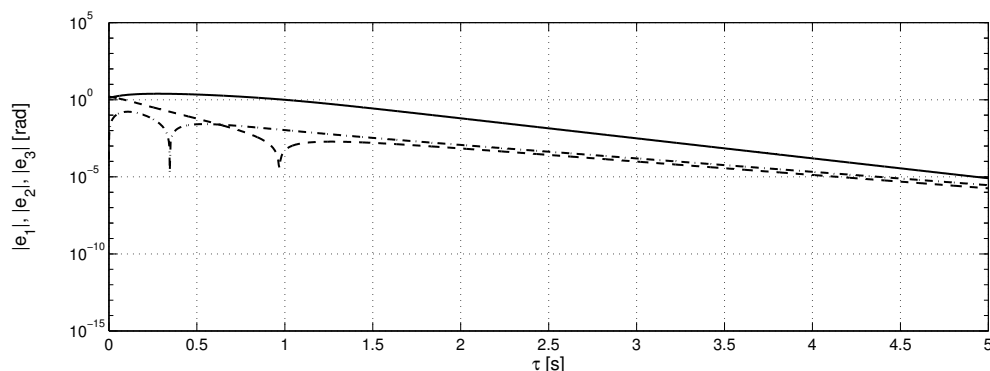
Rys. 3.64: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – efektywność orientowania pola \mathbf{g}_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(\mathbf{g}_2^*, \mathbf{h}^*)$.



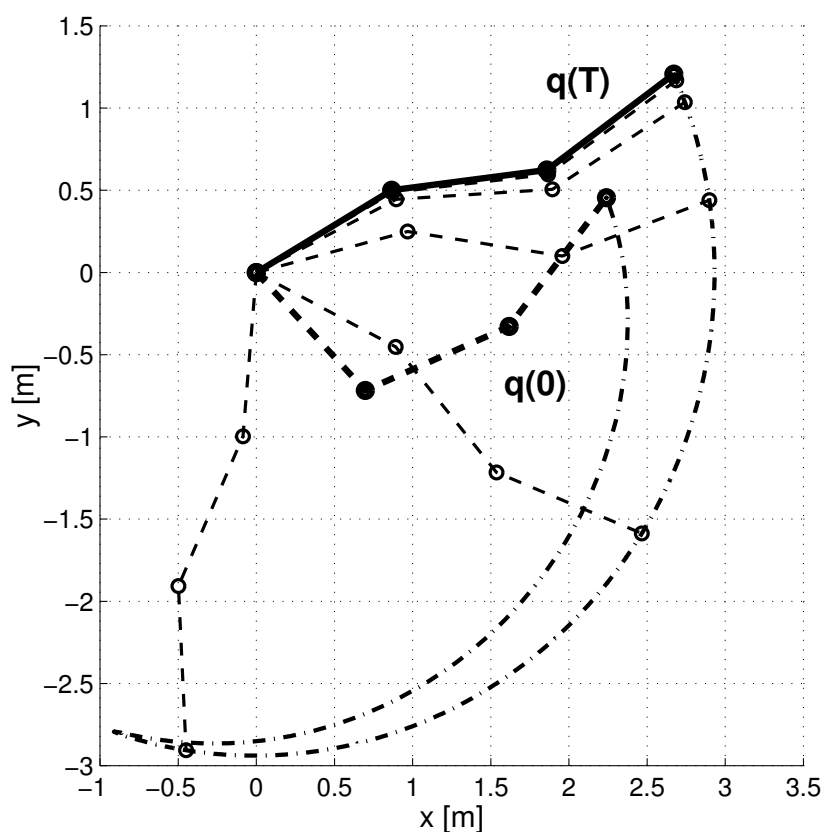
Rys. 3.65: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – pomocniczy błąd orientacji e_{1a} .



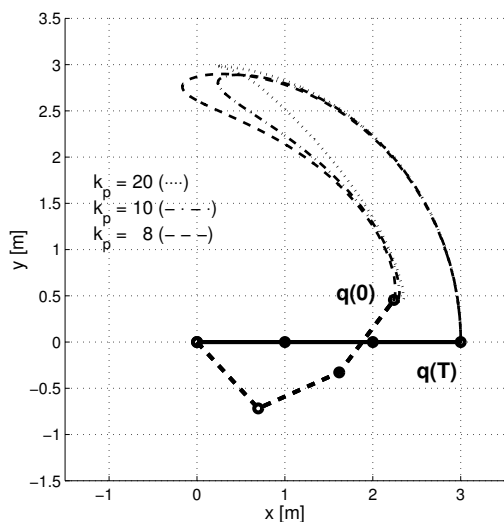
Rys. 3.66: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – sygnały sterujące: u_1 (—), u_2 (---).



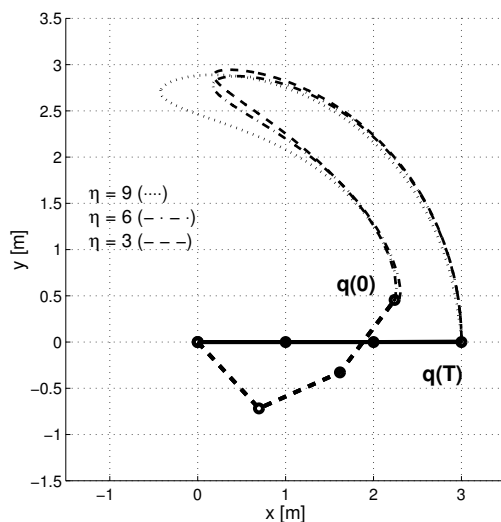
Rys. 3.67: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny różny od zera) – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_1|$ (—), $|e_2|$ (---), $|e_3|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



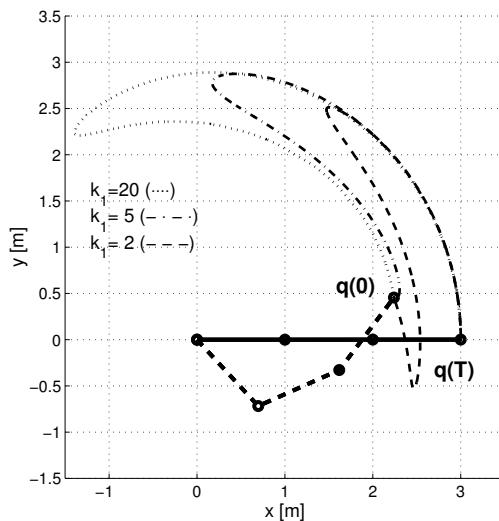
Rys. 3.68: Σ_{NHMmod} : trajektoria T4 (punkt referencyjny $q_t \hat{=} [0.52 \ -0.4 \ 0.5]^T$) – ścieżka kreślona przez końcówkę robota w przestrzeni zadania w stanie przejściowym (zaznaczono początkową $q(0)$ i końcową $q(T)$ konfigurację sterowanego manipulatora oraz kilka konfiguracji stanu przejściowego – kreślone co $0.5[s]$; przyjęto jednostkowe długości ogniw manipulatora).



Rys. 3.69: Σ_{NHMmod} : wpływ wartości współczynnika k_p na jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji (przyjęto: $k_1 = 10$, $\eta = 5$, $q_t \triangleq \mathbf{0}$, $q(0) \triangleq [-0.8 \ 1.2 \ 0.5]^T$).



Rys. 3.70: Σ_{NHMmod} : wpływ wartości współczynnika η na jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji (przyjęto: $k_p = 10$, $k_1 = 10$, $q_t \triangleq \mathbf{0}$, $q(0) \triangleq [-0.8 \ 1.2 \ 0.5]^T$).



Rys. 3.71: Σ_{NHMmod} : wpływ wartości współczynnika k_1 na jakość procesów przejściowych dla zadania stabilizacji (przyjęto: $k_p = 5$, $\eta = 3$, $q_t \triangleq \mathbf{0}$, $q(0) \triangleq [-0.8 \ 1.2 \ 0.5]^T$).

3.3 System łańcuchowy

Istotnym i interesującym, tak z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia, układem nieholonomicznym jest system łańcuchowy. Jest to w zasadzie model abstrakcyjnego systemu, dla którego trudno znaleźć konkretną interpretację fizyczną²³. Jego popularność oraz duże znaczenie wynika z faktu, iż wiele modeli systemów występujących w praktyce można – przynajmniej lokalnie – transformować do takiej właśnie postaci modelu łańcuchowego za pomocą przekształcenia dyfeomorficznego. W konsekwencji, wszystkie algorytmy sterowania stosowalne do systemu łańcuchowego będą miały również zastosowanie do systemów oryginalnych (w dziedzinie definiowanej poprzez wybrane przekształcenie). Zatem rozważanie modeli łańcuchowych z punktu widzenia sterowania stanowi próbę unifikacji podejścia do problemu sterowania dla całej klasy systemów nieholonomicznych.

W tej pracy uwaga zostanie skupiona na abstrakcyjnym trójwymiarowym systemie łańcuchowym postaci:

$$\Sigma_{NHCS} : \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} u_2, \quad (3.155)$$

gdzie $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ jest wektorem stanu, a $u_1, u_2 \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ oznaczają sygnały wejściowe. Aby zachować spójność rozważań i analizy powyższego systemu z dotychczasowymi przykładami, wprowadzimy pewną modyfikację równań (3.155) polegającą jedynie na zamianie kolejności współrzędnych w wektorze stanu. Zdefiniujmy nowe zmienne stanu: $y_1 \triangleq x_2$, $y_2 \triangleq x_1$ oraz $y_3 \triangleq x_3$. W nowych współrzędnych system łańcuchowy przyjmuje następującą postać:

$$\Sigma_{NHCSmod} : \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y_1 \end{bmatrix} u_2, \quad (3.156)$$

gdzie teraz $\mathbf{q} \triangleq [y_1 \ y_2 \ y_3]^T \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ jest nowym wektorem stanu, a $u_1, u_2 \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ oznaczają ponownie sygnały wejściowe²⁴. Ze względu na trywialną postać transformacji zmiennych \mathbf{x} we współrzędne \mathbf{q} , dalsze rozważania, bez utraty ogólności, ograniczone zostaną do systemu (3.156). Przywołując ogólną postać modeli podklasy (2.1)-(2.2) można zauważyć, że $\Sigma_{NHCSmod} \in \Sigma$ oraz:

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_2(y_1) \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3(y_1) \end{bmatrix} \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_2^*(y_1) \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.157)$$

Niecałkowalne więzy kinematyczne związane z kinematyką (3.156) wynikają z wylimi-

²³Wyjątek może stanowić specjalnie skonstruowany manipulator zaprezentowany w pracy [CN02], którego model kinematyki jest z założenia systemem łańcuchowym.

²⁴Taka zamiana nie zmienia oczywiście żadnych własności systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ w stosunku do Σ_{NHCS} .

nowania elementu u_2 z dwóch ostatnich równań w (3.156). Zapiszemy je w postaci Pfaffa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = [0 \quad -y_1 \quad 1] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad \dot{\mathbf{q}} \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.158)$$

Przeanalizujemy teraz kinematykę systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ pod względem własności związanych z metodologią VFO. Sprawdźmy zatem cztery warunki konieczne stosowalności metody.

Warunek **W1**: można pokazać, że $\forall_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3}$ system $\Sigma_{NHCSmod}$ jest w pełni sterowalny:

$$\det(\mathbf{C}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(\mathbf{C}) = 3 = \dim(\mathbf{q}),$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą osiągalności:

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2(y_1) & [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2(y_1)] \end{bmatrix} \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.159)$$

Warunek **W2**: z postaci pola $\mathbf{g}_2(y_1)$ wynika, że $\forall_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \|\mathbf{g}_2(y_1)\| \geq 1$ i wszystkie punkty $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ pola są regularne.

Warunek **W3**: pierwsza składowa pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ jest tożsamościowo równa jeden, natomiast dla ograniczonych wartości zmiennej y_1 także druga składowa tego pola jest ograniczona; zatem dla ograniczonych wartości y_1 , czyli dla podprzestrzeni konfiguracyjnej

$$\mathcal{Q}'_{NHCSmod} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : |y_1| < \infty\} \quad (3.160)$$

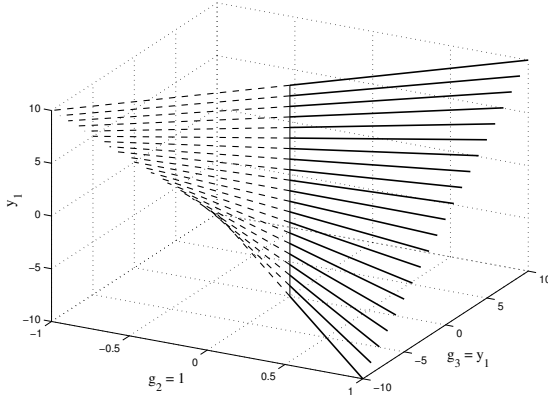
pole $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ jest ograniczone.

Warunek **W4**: zmiana wartości y_1 implikuje zmianę orientacji pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ w \mathbb{R}^2 :

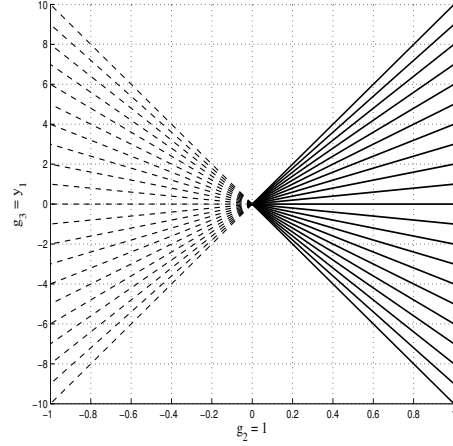
$$\cos \alpha = \frac{z_1 + z_2 y_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sqrt{1 + y_1^2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha(y_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \neq 0,$$

gdzie $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(y_1), \mathbf{z})$, a $\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ jest pewnym polem odniesienia. Ostatecznie warunki konieczne W1-W4 są dla systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ spełnione.

Zbiór kierunków i orientacji (ciągłe grubsze linie) osiągalnych przez pole $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ w przestrzeni \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej y_1 został pokazany na rys. 3.72 i 3.73. Można zauważyć, że co prawda pole $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ jest orientowalne w \mathbb{R}^2 , lecz nie w pełni. Ze względu na postać pierwszej składowej $g_2 \equiv 1$ pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$, osiągalne są tylko orientacje z pierwszej i czwartej ćwiartki płaszczyzny $g_2 \times g_3$ (grubsze ciągłe linie na rys. 3.73). Zauważmy, że kierunek $\beta_s \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(y_1), \mathbf{z}) = 0$ względem ustalonego pola odniesienia $\mathbf{z} \triangleq [0 \quad z]^T$, $z \neq 0$ (zwany odtąd kierunkiem osobliwym) nie jest realizowalny dla dowolnego ograniczonego y_1 . Wynika z tego, iż pole $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ nie jest także w pełni kierowalne w \mathbb{R}^2 . Fakt ten jednak nie neguje możliwości zastosowania metody VFO do systemu łańcuchowego pod warunkiem jednak, że strategia sterowania będzie uwzględniała sposób *przechodzenia* przez kierunki osobliwe lub inaczej – sposób omijania tych kierunków w trakcie ewolucji systemu. Warto również zauważyć, iż bieżąca wartość zmiennej y_1 determinuje bieżącą długość wektorów



Rys. 3.72: Osiągalne kierunki i orientacje (ciągłe grubsze linie) pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(y_1) = [1 \ y_1]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej orientującej y_1 dla $y_1 \in [-10, 10]$ (wykres z dyskretyzacją $\Delta y_1 = 1$).



Rys. 3.73: Osiągalne kierunki i orientacje (ciągłe grubsze linie) pola wektorowego $\mathbf{g}_2^*(y_1) = [1 \ y_1]^T$ w \mathbb{R}^2 jako funkcja zmiennej orientującej y_1 dla $y_1 \in [-10, 10]$ z dyskretyzacją $\Delta y_1 = 1$ – rzut ortogonalny na płaszczyznę $g_2 \times g_3$.

$\mathbf{g}_2^*(y_1)$ w \mathbb{R}^2 , co świadczy o tym, iż przy ustalonym sterowaniu u_2 efektywność procesu popychania w kierunku składowym definiowanym współrzędną g_3 pola \mathbf{g}_2 jest funkcją właśnie zmiennej y_1 . Dodatkowo, efektywność popychania wzdłuż składowej $g_2 \equiv 1$ tego pola jest stała i niezależna od punktu pola.

Ze względu na własność niepełnej kierowalności pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$, należy bardziej szczegółowo rozważyć te kierunki, wzdłuż których ewolucja systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ nie jest możliwa. Dla potrzeb dalszych rozważań zdefiniujemy zbiór kierunków osobliwych \mathcal{H}_s^* jako zbiór niezerowych i w ogólności zmiennych w czasie pól wektorowych:

$$\mathcal{H}_s^* \triangleq \left\{ \mathbf{h}^* = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : H_1 = 0 \right\}. \quad (3.161)$$

Z powyższej definicji i z postaci pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ (por. (3.157)) wynika, że dla dowolnego ograniczonego y_1 nałożenie kierunku pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ na kierunek pola z rodziny \mathcal{H}_s^* nie jest możliwe. Definicja (3.161) zostanie wykorzystana do modyfikacji sterowania VFO w sąsiedztwie kierunków osobliwych.

Rozważmy teraz przynależność poszczególnych sygnałów modelu $\Sigma_{NHCSmod}$ do odpowiednich zbiorów z punktu widzenia metodologii VFO. Wcześniejsze rozważania oraz postać modelu (3.156) wskazują, że jedynie zmienna $y_1 \in \mathcal{Q}_o$ jest zmienną orientującą. Z pierwszego równania w (3.156) wynika ponadto, że sygnał $u_1 \in \mathcal{U}_o$ jest sterowaniem orientującym, a y_1 jest zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio. Skoro $y_2, y_3 \notin \mathcal{Q}_o$, to $u_2 \notin \mathcal{U}_o$, ale z kolei $u_2 \in \mathcal{U}_p$, czyli jest sterowaniem popychającym. W przypadku systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ zachodzi: $\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_p = \emptyset$ i w związku z tym model (3.156) jest w pełni dekomponowalny na jednowymiarowy podsystem $\Sigma_{NHCSmod}^1$ wyłączenie orientujący

i dwuwymiarowy podsystem $\Sigma_{NHCSmod}^*$ wyłączenie popychany:

$$\Sigma_{NHCSmod}^1 : \dot{y}_1 = u_1, \quad (3.162)$$

$$\Sigma_{NHCSmod}^* : \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{g}_2^*(y_1) u_2. \quad (3.163)$$

Ostatecznie, przynależność sygnałów systemu (3.156) do odpowiednich zbiorów można zapisać w postaci zestawu następujących relacji:

$$\Sigma_{NHCSmod} : \begin{cases} y_1 \in \mathcal{Q}_o, \\ y_2, y_3 \notin \mathcal{Q}_o, \\ u_1 \in \mathcal{U}_o, \\ u_2 \in \mathcal{U}_p, \\ U_o \cap U_p = \emptyset. \end{cases} \quad (3.164)$$

Model trójwymiarowego systemu łańcuchowego pozwala na realizację wszystkich czterech typów trajektorii T1-T4 wyróżnionych w rozdziale 2. Ze względu na to, iż rozważany system łańcuchowy jest modelem abstrakcyjnym, nie można w tym miejscu podać fizycznych interpretacji poszczególnych trajektorii T1 do T4, jak w przypadku systemów Σ_{UMR} oraz Σ_{NHMmod} . Istnieje jednak prosta interpretacja geometryczna w podprzestrzeni $\mathcal{Q}^* = \{\mathbf{q}^* = [y_2 \ y_3]^T\} \subset \mathbb{R}^2$. Mianowicie, trajektoria popychająca T1 implikuje ruch wzdłuż linii prostej w podprzestrzeni \mathcal{Q}^* (bez zmiany kierunku i orientacji pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$). Trajektoria orientująca T2 odpowiada zmianie kierunku (orientacji) pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$ w pewnym ustalonym punkcie $\mathbf{q}^* = [y_2 \ y_3]^T$ w \mathcal{Q}^* . Ewolucję systemu wzdłuż krzywych w \mathcal{Q}^* (ze zmienną orientacją pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$) zapewnia realizacja trajektorii popychająco-orientujących T3. Ostatnia zdegenerowana trajektoria T4 odpowiada pozostawianiu systemu w ustalonym punkcie $\mathbf{q}^* = [y_2 \ y_3]^T$ w \mathcal{Q}^* z ustaloną orientacją pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$.

Rozważania rawarte w kolejnych trzech podpunktach oparte są częściowo na pracach [MK05a, MK05d]. Dowody twierdzeń zamieszczone niżej przeprowadzone zostaną na podstawie dowodów twierdzeń 3.1 oraz 3.2 (fragmenty rozważań dowodowych są analogiczne jak w punktach 3.1 oraz 3.2, lecz zostaną celowo powtórzone, aby podkreślić wspólną systematykę dowodową).

3.3.1 Wykorzystanie metodologii VFO

Przyjmijmy ogólną postać pola zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{h}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ \mathbf{h}^*(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{h}^*(\cdot) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.165)$$

Do systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ zastosujemy teraz ogólną strategię VFO opisaną zależnościami (2.10)-(2.12). Zgodnie z (2.11) szukamy takiego sterowania u_1 , które gwarantuje spełnienie relacji:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{g}_2^*(y_1(\tau)) k(\tau) = \mathbf{h}^*(\cdot) \stackrel{(3.157, 3.165)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} k(\tau) \\ k(\tau) y_1(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix},$$

gdzie $k(\tau)$ jest pewną niezerową funkcją skalarną. Łącząc oba powyższe równania w jedno zależne od zmiennej orientującej y_1 otrzymujemy konkretną postać relacji (2.11) dla systemu łańcuchowego (3.156):

$$u_1 : \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_1(\tau) = \frac{h_3(\cdot)}{h_2(\cdot)}, \quad (3.166)$$

gdzie granica po prawej stronie (3.166) określa tzw. *warunek orientowania* dla modelu (3.156). Z postaci pierwszego równania w (3.156) wynika, że (3.166) nie może być spełnione natychmiastowo ze względu na całkową zależność zmiennej orientującej od sterowania orientującego: $y_1(\tau) = y_1(0) + \int_0^\tau u_1(\xi) d\xi$. Wprowadzamy zatem *pomocniczą zmienną orientacji*:

$$y_{1a}(\tau) \triangleq \frac{h_3(\cdot)}{h_2(\cdot)} \in \mathbb{R}, \quad \text{dla } h_2(\cdot) \neq 0 \quad (3.167)$$

oraz *pomocniczy błąd orientacji*:

$$e_{1a}(\tau) \triangleq y_{1a}(\tau) - y_1(\tau), \quad e_{1a}(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (3.168)$$

Spełnienie (3.166) wymaga teraz znalezienia takiego sterowania u_1 , aby zapewnić asymptotyczną zbieżność błędu e_{1a} do zera. Biorąc pod uwagę pierwsze równanie w modelu (3.156) oraz definicję (3.168) proponuje się następującą postać sterowania orientującego:

$$u_1 \triangleq k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{y}_{1a}(\tau), \quad (3.169)$$

gdzie $k_1 > 0$ jest współczynnikiem projektowym, a sygnał sprzężenia wyprzedzającego \dot{y}_{1a} ma następującą postać ogólną:

$$\dot{y}_{1a}(\tau) \stackrel{(3.167)}{=} \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2}, \quad \text{dla } h_2 \neq 0. \quad (3.170)$$

Zgodnie z relacją (2.12) ogólnej strategii VFO, przyjmiemy następującą ogólną postać sterowania popychającego dla systemu $\Sigma_{NHCSmod}$:

$$u_2 \triangleq k_2(y_1) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha, \quad \alpha \triangleq \angle(\mathbf{g}_2^*(y_1), \mathbf{h}^*), \quad (3.171)$$

gdzie:

$$k_2(y_1) \triangleq \frac{1}{\|\mathbf{g}_2^*(y_1)\|} \stackrel{(3.156)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \quad (3.172)$$

oraz

$$\cos \alpha \stackrel{(2.18)}{=} \frac{\mathbf{g}_2^{*T}(y_1) \mathbf{h}^*}{\|\mathbf{g}_2^*(y_1)\| \|\mathbf{h}^*\|}. \quad (3.173)$$

Współczynnik skalujący $k_2(y_1)$ został wprowadzony w celu zapewnienia zbieżności sterowania popychającego u_2 do sterowania referencyjnego u_{2t} w otoczeniu trajektorii referencyjnej $\mathbf{q}_t^* \triangleq [y_{2t} \ y_{3t}]^T$. Podstawiając (3.173) do ogólnej propozycji (3.171), otrzymujemy uproszczoną postać sterowania popychającego:

$$u_2 = \frac{\mathbf{g}_2^{*T}(y_1) \mathbf{h}^*}{\|\mathbf{g}_2^*(y_1)\|^2} \stackrel{(3.156)}{=} \frac{h_2 + h_3 y_1}{1 + y_1^2}. \quad (3.174)$$

Przedstawioną metodologię VFO podsumowuje następująca propozycja.

Propozycja 3.5 (Sterownik VFO dla systemu $\Sigma_{NHCSmod}$ – postać ogólna) *Ogólna postać sterownika VFO dla modelu systemu łańcuchowego (3.156) gwarantująca rozwiązanie zadania śledzenia oraz zadania stabilizacji ma postać:*

$$\begin{aligned} u_1 &\triangleq k_1(y_{1a} - y_1) + \dot{y}_{1a}, \\ u_2 &\triangleq k_2(y_1) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha, \end{aligned}$$

gdzie $y_{1a}, \dot{y}_{1a}, k_2(y_1)$ i $\cos \alpha$ zdefiniowane są odpowiednio zależnościami (3.167), (3.170), (3.172) i (3.173).

Poniżej, w opraciu o propozycję 3.5, przedstawione zostaną ostateczne postaci praw sterowania VFO zarówno dla zadania śledzenia jak i stabilizacji w punkcie. Podstawową różnicą obu praw sterowania dla wymienionych zadań będzie jedynie postać definicji pola zbieżności $\mathbf{h}(\cdot)$.

3.3.2 Zadanie śledzenia trajektorii

Rozważmy model kinematyki (3.156), którego ewolucja została ograniczona do podprzestrzeni konfiguracyjnej (3.160) oraz trajektorię referencyjną $\mathbf{q}_t(\tau)$, $\tau \in [0, T)$, gdzie $T > 0$ jest horyzontem czasowym śledzenia. Zakładamy, że $\mathbf{q}_t(\tau) \in \mathcal{Q}'_{NHCSmod}$ oraz że $\mathbf{q}_t(\tau)$ należy do zbioru trajektorii dopuszczalnych \mathcal{T}_{AD} i ustawicznie pobudzających \mathcal{T}_{PE} , tzn. (zgodnie z def. 2.23 i 2.24):

$$\mathbf{q}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} y_{1t}(\tau) \\ y_{2t}(\tau) \\ y_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y_{1t}(\tau) \\ \mathbf{q}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y_{1t}(0) + \int_0^\tau u_{1t}(\xi) d\xi \\ y_{2t}(0) + \int_0^\tau u_{2t}(\xi) d\xi \\ y_{3t}(0) + \int_0^\tau y_{1t}(\xi) u_{2t}(\xi) d\xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \forall \tau \in [0, T) \quad u_{2t}(\tau) \neq 0. \quad (3.175)$$

Ponadto zakładamy, że:

$$y_{1t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty, \quad u_{1t}(\tau), u_{2t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty, \mathcal{C}^1. \quad (3.176)$$

Prędkość referencyjna wzdłuż trajektorii dopuszczalnej $\mathbf{q}_t(\tau)$ wynika z postaci modelu $\Sigma_{NHCSmod}$ lub bezpośrednio z różniczkowania (3.175):

$$\dot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{y}_{1t}(\tau) \\ \dot{y}_{2t}(\tau) \\ \dot{y}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{y}_{1t}(\tau) \\ \dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} u_{1t}(\tau) \\ u_{2t}(\tau) \\ y_{1t}(\tau) u_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.177)$$

Przyspieszenie referencyjne wzdłuż trajektorii $\mathbf{q}_t(\tau)$ wynika z różniczkowania (3.177):

$$\ddot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{y}_{1t}(\tau) \\ \ddot{y}_{2t}(\tau) \\ \ddot{y}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.177)}{=} \begin{bmatrix} \dot{u}_{1t}(\tau) \\ \dot{u}_{2t}(\tau) \\ u_{1t}(\tau) u_{2t}(\tau) + y_{1t}(\tau) \dot{u}_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.178)$$

Zgodnie z (3.177), definicję sygnału referencyjnego $y_{1t}(\tau)$ z (3.175) można określić w następujący równoważny sposób:

$$y_{1t}(\tau) \triangleq \frac{\dot{y}_{3t}(\tau)}{\dot{y}_{2t}(\tau)} \in \mathbb{R}. \quad (3.179)$$

W przypadku trajektorii ustawicznie pobudzających (3.175) mamy:

$$\forall_{\tau \geq 0} u_{2t}(\tau) \neq 0 \stackrel{(3.177)}{\implies} \forall_{\tau \geq 0} \dot{y}_{2t}(\tau) \neq 0$$

i definicja (3.179) jest ograniczona i dobrze określona dla każdego $\tau \geq 0$.

Uwaga 3.14 *Zgodnie z podziałem trajektorii referencyjnych z rozdziału 2, rozpatrywane tutaj trajektorie dopuszczalne (3.175) zostają ograniczone do typów T1 lub T3.*

Zdefiniujmy błąd śledzenia trajektorii referencyjnej:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ e_2(\tau) \\ e_3(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{q}_t(\tau) - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} y_{1t}(\tau) - y_1(\tau) \\ y_{2t}(\tau) - y_2(\tau) \\ y_{3t}(\tau) - y_3(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.180)$$

W tym momencie określimy szczegółowo wyrażenia definiujące ogólną postać sygnałów sterujących u_1, u_2 dla zadania śledzenia przedstawionych w propozycji 3.5. W tym celu musimy zdefiniować postać pola \mathbf{h} .

Pole \mathbf{h} zaprojektujemy poprzez analogię do przykładu robota jednokołowego (patrz równania (3.25) i (3.26)) jako liniową kombinację odpowiednich błędów śledzenia i sygnałów wyprzedzających:

$$\mathbf{h}(e_{1a}, \dot{y}_{1a}, \mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_t^*) = \begin{bmatrix} h_1(e_{1a}, \dot{y}_{1a}) \\ h_2(e_2, \dot{y}_{2t}) \\ h_3(e_3, \dot{y}_{3t}) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{y}_{1a}(\tau) \\ k_p e_2(\tau) + \dot{y}_{2t}(\tau) \\ k_p e_3(\tau) + \dot{y}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.181)$$

gdzie $k_1, k_p > 0$ są parametrami projektowymi. Z powyższej definicji oraz z (3.165) wynika, że:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_t^*) = \begin{bmatrix} h_2(e_2, \dot{y}_{2t}) \\ h_3(e_3, \dot{y}_{3t}) \end{bmatrix} \triangleq k_p \mathbf{e}^*(\tau) + \dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.182)$$

Z porównania (3.169) z (3.181) mamy: $u_1 \triangleq h_1$, a składowa h_1 określa sposób zbieżności dla zmiennej orientującej y_1 . Ponownie poprzez analogię do przykładu robota jednokołowego, wprowadzenie propozycji (3.181) pozwala na początkowe powiększenie się błędu e_1 w stanie przejściowym, ale dzięki temu zapewnia szybką i *naturalną* zbieżność $\mathbf{q}^* = [y_2 \ y_3]^T$ w pobliże trajektorii referencyjnej $\mathbf{q}_t^* = [y_{2t} \ y_{3t}]^T$. Dopiero po znalezieniu się systemu w okolicy \mathbf{q}_t^* , pomocnicza zmienna orientacji y_{1a} będzie przechodzić w sposób ciągły w sygnał referencyjny y_{1t} , a pomocniczy błąd orientacji e_{1a} stanie się błędem śledzenia e_1 .

STEROWNIK 5 *Sterownik VFO (3.169)-(3.174) dla zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie ma następującą postać (zakładając, że: $h_2 \neq 0$ oraz $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}'_{NHCSmod}$):*

$$u_1 \stackrel{(3.169)}{=} k_1(y_{1a} - y_1) + \dot{y}_{1a}, \quad (3.183)$$

$$u_2 \stackrel{(3.174)}{=} \frac{(k_p e_2 + \dot{y}_{2t}) + (k_p e_3 + \dot{y}_{3t})y_1}{1 + y_1^2}, \quad (3.184)$$

gdzie postać y_{1a} wynika z (3.167) oraz (3.181):

$$y_{1a} \triangleq \frac{k_p e_3 + \dot{y}_{3t}}{k_p e_2 + \dot{y}_{2t}}, \quad (3.185)$$

postać \dot{y}_{1a} , na podstawie (3.170), wyraża się za pomocą wzoru:

$$\dot{y}_{1a} = \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2}, \quad (3.186)$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_2 &\stackrel{(3.181)}{=} k_p(y_{2t} - y_2) + \dot{y}_{2t}, & \Rightarrow & \quad \dot{h}_2 = k_p(\dot{y}_{2t} - \dot{y}_2) + \ddot{y}_{2t}, \\ h_3 &\stackrel{(3.181)}{=} k_p(y_{3t} - y_3) + \dot{y}_{3t}, & \Rightarrow & \quad \dot{h}_3 = k_p(\dot{y}_{3t} - \dot{y}_3) + \ddot{y}_{3t}, \end{aligned}$$

a sygnały referencyjne $\dot{y}_{2t}, \dot{y}_{3t}$ oraz $\ddot{y}_{2t}, \ddot{y}_{3t}$ wynikają z (3.177)-(3.178).

♣

Twierdzenie 3.7 Dana jest trajektoria referencyjna (3.175)-(3.176) oraz obszar w dziedzinie błędu śledzenia: $\mathcal{E}_{NHCS1}^* \triangleq \mathbb{R}^2 \setminus \{e^*(\tau) = [e_2(\tau) \ e_3(\tau)]^T : e_2(\tau) = -\frac{1}{k_p} \dot{y}_{2t}(\tau)\}$. Zakładając, że:

$$\forall \tau \geq 0 \quad e^*(\tau) \in \mathcal{E}_{NHCS1}^* \stackrel{(3.182)}{\implies} \forall \tau \geq 0 \quad h_2(\tau) \neq 0, \quad (3.187)$$

ciągłe prawo sterowania VFO (3.183)-(3.184) zastosowane do systemu (3.156) gwarantuje globalną asymptotyczną zbieżność błędu śledzenia (3.180) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau), e_2(\tau), e_3(\tau) = 0$$

dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{E}_{NHCS1}^*$.

Dowód. Dowód przeprowadzony zostanie poprzez analogię do dowodu twierdzenia 3.1. Rozważmy ewolucję zmiennej orientującej y_1 . Podstawienie (3.183) do (3.156) daje następujące równanie:

$$(\dot{y}_{1a} - \dot{y}_1) + k_1(y_{1a} - y_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_{1a} + k_1 e_{1a} = 0,$$

z którego wynika, że y_1 zmierza wykładniczo do wartości pomocniczej zmiennej orientacji y_{1a} dla $\tau \rightarrow \infty$:

$$e_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_1(\tau) = y_{1a}(\tau). \quad (3.188)$$

Sterowanie orientujące (3.183) gwarantuje zatem spełnienie warunku orientowania (3.166).

Rozważmy teraz ewolucję błędu $e^* \in \mathbb{R}^2$. Na podstawie (3.180) i (3.182) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = \dot{q}_t^* - \dot{q}^* \quad \text{oraz} \quad \dot{q}_t^* \stackrel{(3.182)}{=} h^* - k_p e^*.$$

Podstawiając prawą stronę ostatniego równania do równania z lewej strony otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\dot{\mathbf{e}}^* + k_p \mathbf{e}^* = \mathbf{r}, \quad \text{gdzie } \mathbf{r} \triangleq \mathbf{h}^* - \dot{\mathbf{q}}^*. \quad (3.189)$$

Można prosto pokazać (Dodatek B.3), że prawdziwe są równania:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (3.190)$$

gdzie $\cos \alpha$ jest zdefiniowany w (3.173) oraz (Dodatek B.3)

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} (1 - \cos^2 \alpha(y_1)) = 0. \quad (3.191)$$

Zaproponujmy teraz następującą dodatnio określoną funkcję klasy \mathcal{K}_∞ :

$$V(\mathbf{e}^*) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*T} \mathbf{e}^* \in \mathcal{K}_\infty. \quad (3.192)$$

Pochodna tej funkcji może być oszacowana jak następuje (dla prostoty przyjęto oznaczenie: $\gamma = \gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(y_1(\tau))} \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{e}^{*T} \dot{\mathbf{e}}^* \stackrel{(3.189)}{=} \mathbf{e}^{*T} (-k_p \mathbf{e}^* + \mathbf{r}) = \\ &= -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \mathbf{e}^{*T} \mathbf{r} \leq \\ &\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{r}\| = \\ &\stackrel{(3.190)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{h}^*\| \gamma = \\ &\stackrel{(3.182)}{=} -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \|\mathbf{e}^*\| \|k_p \mathbf{e}^* + \dot{\mathbf{q}}^*\| \gamma \leq \\ &\leq -k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma k_p \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma \|\mathbf{e}^*\| \|\dot{\mathbf{q}}^*\| = \\ &= -k_p (1 - \gamma) \|\mathbf{e}^*\|^2 + \gamma \|\mathbf{e}^*\| \|\dot{\mathbf{q}}^*\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\dot{V} \leq -W(\|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\|, \gamma(\tau)), \quad (3.193)$$

gdzie funkcja ciągła

$$W(\|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\|, \gamma(\tau)) = k_p (1 - \gamma(\tau)) \|\mathbf{e}^*(\tau)\|^2 - \gamma(\tau) \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\| \quad (3.194)$$

jest dodatnio określona dla

$$\|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \Gamma(\tau), \quad \Gamma(\tau) = \frac{\gamma(\tau) \|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\|}{k_p (1 - \gamma(\tau))}. \quad (3.195)$$

Z założenia (3.176) i z postaci modelu (3.156) wynika, że $\|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$. Korzystając z twierdzenia La Salla-Yoshizawy możemy wnioskować, że wszystkie trajektorie $\mathbf{e}^*(\tau)$, dla których $\|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \Gamma(\tau)$ i $\gamma(\tau) < 1$ są ograniczone i spełniają warunek:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W(\tau) = 0 \stackrel{(3.194, 3.195)}{\implies} \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{e}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = \Gamma(\tau). \quad (3.196)$$

Z (3.188) oraz (3.191) wynika, że $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau) = 0$, gdzie $\gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(y_1(\tau))}$. Zatem na podstawie (3.195) mamy:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma(\tau) = 0 \stackrel{(3.196)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| = 0 \implies \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_2(\tau), e_3(\tau) = 0. \quad (3.197)$$

Analogicznie jak w przypadku robota jednokołowego i manipulatora nieholonomicznego, w okresie przejściowym może wystąpić chwila $\hat{\tau}$, w której zachodzi $\gamma(\hat{\tau}) = 1$ powodując chwilowe wstrzymanie zbieżności błędu \mathbf{e}^* . Jednak punkt w przestrzeni stanu, dla którego zjawisko to ma miejsce nie jest przyciągający.

Z definicji (3.181) i (3.179) oraz z wniosków (3.197) i (3.188) wynika, że:

$$\lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0} y_{1a}(e_2, e_3) = y_{1t}(\tau) \stackrel{(3.168, 3.180, 3.197)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = e_1(\tau) \stackrel{(3.188)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0. \quad (3.198)$$

Skoro $\|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$, to z (3.182) wynika, że $\|\mathbf{h}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$, a z definicji (3.171) wynika, że $u_2(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Można także pokazać, iż $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_2(\tau) = u_{2t}(\tau)$. Z założenia (3.187), z wniosku $\|\dot{\mathbf{e}}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ oraz z definicji (3.186) i założenia (3.176) wynika: $\dot{y}_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Na podstawie (3.178) łatwo sprawdzić również, że $\lim_{\|\mathbf{e}^*\| \rightarrow 0} \dot{y}_{1a}(\mathbf{e}^*) = \dot{y}_{1t}(\tau)$, co z kolei z wnioskiem (3.188) oraz z definicją (3.183) implikuje: $u_1(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_1(\tau) = u_{1t}(\tau)$. □

Uwaga 3.15 Podobnie jak dla systemów Σ_{UMR} oraz $\Sigma_{NHM_{mod}}$, także i w tym przypadku udowodniona została jedynie asymptotyczna zbieżność błędu \mathbf{e}^* . O szybkości tej zbieżności może jednak ponownie świadczyć prosta analiza dotycząca postaci funkcji $W(\|\mathbf{e}^*\|, \|\dot{\mathbf{q}}_t^*\|, \gamma)$ przeprowadzona wcześniej w treści uwagi 3.5 (patrz także: uwaga 3.11), zgodnie z którą efektywność procesu orientowania ma kluczowe znaczenie dla szybkości zbieżności błędu \mathbf{e}^* . Zapewnienie dużej efektywności procesu orientowania (wystarczająco duża wartość współczynnika k_1 w (3.183)) przybliży bowiem charakter zbieżności błędów e_2, e_3 do zbieżności wykładniczej.

Uwaga 3.16 Definicje (3.167) oraz (3.170) dają wartości nieograniczone dla przypadku, w którym $h_2(e_2(\bar{\tau})) = 0 \Rightarrow \exists \bar{\tau} < \infty \mathbf{e}^*(\bar{\tau}) \notin \mathcal{E}_{NHCS1}^*$ (por. założenie (3.187)), czyli dla:

$$e_2(\bar{\tau}) \stackrel{(3.182)}{=} -\frac{\dot{y}_{2t}(\bar{\tau})}{k_p}.$$

Powyzsza równość może zachodzić jedynie w stanach przejściowych i ma przejrzystą interpretację geometryczną. Przywołując bowiem definicję zbioru kierunków osobliwych (3.161) łatwo zauważyć, że zerowanie się w chwili $\bar{\tau}$ współrzędnej $h_2(\tau)$ pola zbieżności $\mathbf{h}^*(\tau)$ odpowiada chwilowej konieczności ewolucji sterowanego systemu wzdłuż kierunku osobliwego $\mathbf{h}^*(\bar{\tau}) = [0 \ e_3(\bar{\tau})]^T \in \mathcal{H}_s^*$, co ze względu na własności systemu łańcuchowego nie jest możliwe. Skoro osiągnięcie przez h_2 wartości zerowej jest tylko chwilowe (wystąpić może tylko w stanie przejściowym), wystarczy wskazać sposób przechodzenia przez punkt $h_2 = 0$ poprzez odpowiednio skonstruowane sterowanie w jego otoczeniu. Ostatecznie zatem, aby zapewnić ograniczoność sygnału sterującego u_1 dla dowolnych wartości współrzędnej h_2 , należy zaproponować metodę przechodzenia przez kierunki osobliwe poprzez wprowadzenie dodatkowych definicji sygnałów pomocniczych y_{1a} oraz \dot{y}_{1a} w otoczeniu punktu osobliwego $h_2 = 0$.

Rozważmy modyfikację, która zapewni ograniczenie sygnałów pomocniczych y_{1a} oraz \dot{y}_{1a} dla dowolnych $h_2 \in \mathbb{R}$ (lub równoważnie: w całej dziedzinie błędu $e_2 \in \mathbb{R}$). Wykorzystamy do tego celu algorytm tunelowy zaproponowany w pracach [Dul00] oraz [Dul01]. Wprowadźmy zatem pojęcie tunelu $\pm\epsilon$, $\epsilon > 0$ wokół punktu $h_2 = 0$. Zaproponujemy następujące dodatkowe definicje sygnałów pomocniczych:

$$y_{1a}(\tau) \triangleq \frac{h_3(\tau)}{\epsilon \operatorname{sgn}(-h_2(\tau_\epsilon))}, \quad (3.199)$$

$$\dot{y}_{1a}(\tau) \triangleq \frac{\dot{h}_3(\tau)}{\epsilon \operatorname{sgn}(-h_2(\tau_\epsilon))}, \quad (3.200)$$

gdzie τ_ϵ jest chwilą wejścia wartości $h_2(\tau)$ w tunel $\pm\epsilon$, przy czym wejście w tunel $\pm\epsilon$ oznacza, że $|h_2(\tau_{\epsilon+})| \leq \epsilon$. Teraz sterownik VFO może zostać ponownie zastosowany zgodnie z równaniami (3.183)-(3.184). Wykorzystanie algorytmu tunelowego gwarantuje, iż sygnał y_{1a} niejako *przeskakuje* przez punkt $h_2 = 0$ przy zachowaniu ciągłości przejścia współrzędnej h_2 przez wartość zerową. Modyfikacja sterowania VFO mająca na celu dobre zdefiniowanie sygnałów sterujących w całej dziedzinie błędu $e_2 \in \mathbb{R}$ wynika z następującej propozycji.

Propozycja 3.6 *Dla danej trajektorii referencyjnej (3.175), odcinkami ciągle prawo sterowania VFO (3.183)-(3.184), w którym:*

$$y_{1a}(\tau), \dot{y}_{1a}(\tau) \triangleq \begin{cases} (3.185), (3.186) & \text{dla } |h_2(\tau)| > \epsilon, \\ (3.199), (3.200) & \text{dla } |h_2(\tau)| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (3.201)$$

gdzie $0 < \epsilon < \inf_{\tau} |u_{2t}(\tau)|$ jest założonym otoczeniem punktu $h_2 = 0$, zastosowane do systemu (3.156) pozwala na zachowanie globalnej asymptotycznej zbieżności błędów śledzenia w sensie zdefiniowanym w twierdzeniu 3.7 dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$.

Zgodnie z powyższą propozycją, definicja sterowania orientującego (3.183) jest nadal aktualna z tym, że sygnały y_{1a}, \dot{y}_{1a} w niej zawarte mają charakter nieciągły (są ciągłe w sensie C^0). Własność ciągłości sterowania u_1 sterownika (3.183)-(3.184) zostaje uchylona na rzecz ciągłości odcinkami. Warto podkreślić, że zbiór punktów nieciągłości $h_2(\tau) = 0$ jest potencjalnie osiągalny tylko w stanach przejściowych i jest nieprzyciągający.

3.3.3 Zadanie stabilizacji w punkcie

Przyjmując w definicji (3.175) zerowe wartości referencyjnych sygnałów wejściowych $u_{1t} = u_{2t} \equiv 0$ otrzymamy zdegenerowaną trajektorię typu T4 w postaci stałego punktu referencyjnego:

$$\mathbf{q}_t \stackrel{(3.175)}{=} \begin{bmatrix} y_{1t}(0) \\ y_{2t}(0) \\ y_{3t}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.202)$$

Zdefiniujmy błąd stabilizacji:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ e_2(\tau) \\ e_3(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} y_{1t} - y_1(\tau) \\ y_{2t} - y_2(\tau) \\ y_{3t} - y_3(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.203)$$

Dla stałego punktu referencyjnego (3.202) prędkość $\dot{\mathbf{q}}_t(\tau)$ z (3.177) jest tożsamościowo równa zeru. Jednak podobnie jak w przypadku systemów Σ_{UMR} oraz Σ_{NHMmod} , prędkość $\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau)$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\dot{\mathbf{q}}_t^*(\tau) \stackrel{(3.177)}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ y_{1t}(\tau) \end{bmatrix} u_{2t}(\tau) \stackrel{(3.202)}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ y_{1t} \end{bmatrix} \cdot 0 = \mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t}) \cdot 0, \quad (3.204)$$

gdzie $u_{2t}(\tau) \equiv 0$, ale $\mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t}) \neq \mathbf{0}$, $\forall y_{1t} \in \mathbb{R}$. Oznacza to ponownie, że pole $\mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t}) \in \mathbb{R}^2$ nie degeneruje się w punkcie referencyjnym (3.202) i w rzeczywistości definiuje referencyjną orientację (oraz kierunek) w punkcie $\mathbf{q}_t^* = [y_{2t} \ y_{3t}]^T \in \mathbb{R}^2$. Własność ta wykorzystana będzie do konstrukcji pola zbieżności \mathbf{h}^* dla przypadku stabilizacji w punkcie poprzez analogię do propozycji (3.182).

Wprowadźmy tzw. *wirtualną prędkość referencyjną* postaci:

$$\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{y}_{2vt}(\tau) \\ \dot{y}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t}) = \delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \begin{bmatrix} 1 \\ y_{1t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.205)$$

gdzie $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$ jest funkcją ciągłą taką, że $\delta(\mathbf{e}^* = \mathbf{0}) = 0$. Wprowadzenie funkcji $\delta(\mathbf{e}^*(\tau))$ pozwala na odpowiednie kształtowanie stanów przejściowych systemu sterowanego i zbieżność zmiennej y_1 do wartości sygnału y_{1t} . Proponuje się następującą definicję:

$$\delta(\mathbf{e}^*(\tau)) \triangleq -\frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t})\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \stackrel{(3.204)}{=} -\frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\sqrt{1 + y_{1t}^2}} \|\mathbf{e}^*(\tau)\|, \quad 0 < \eta < k_p, \quad (3.206)$$

gdzie η jest dodatkowym współczynnikiem projektowym, a $e_{20} \equiv e_2(0)$ stanowi początkową wartość błędu stabilizacji $e_2(\tau)$.

Podstawiając teraz (3.206) do (3.205) otrzymujemy postać wirtualnej prędkości referencyjnej:

$$\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{y}_{2vt}(\tau) \\ \dot{y}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq -\frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t})\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \begin{bmatrix} 1 \\ y_{1t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.207)$$

Wirtualne przyspieszenie referencyjne wynika bezpośrednio z różniczkowania (3.207):

$$\ddot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2vt}(\tau) \\ \ddot{y}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} = -\frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*(y_{1t})\|} \frac{\mathbf{e}^{*T}(\tau) \dot{\mathbf{e}}^*(\tau)}{\|\mathbf{e}^*(\tau)\|} \begin{bmatrix} 1 \\ y_{1t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.208)$$

Zaproponujemy teraz postać pola \mathbf{h}^* , a mianowicie:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \stackrel{(3.165)}{=} \begin{bmatrix} h_2(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \\ h_3(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) \end{bmatrix} \triangleq k_p \mathbf{e}^*(\tau) + \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*(\tau) = \begin{bmatrix} k_p e_2(\tau) + \dot{y}_{2vt}(\tau) \\ k_p e_3(\tau) + \dot{y}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.209)$$

gdzie $k_p > 0$ jest parametrem projektowym. Podstawiając (3.207) do (3.209) otrzymujemy postać pola $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^2$ dla zadania stabilizacji w punkcie:

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}_{2t}^*) = \begin{bmatrix} k_p e_2(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \\ k_p e_3(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| y_{1t} \end{bmatrix}. \quad (3.210)$$

Pełna postać pola zbieżności dla zadania stabilizacji jest następująca (por. (3.181)):

$$\mathbf{h}(e_{1a}, \dot{y}_{1a}, \mathbf{e}^*, \dot{\mathbf{q}}_{vt}^*) \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{y}_{1a}(\tau) \\ k_p e_2(\tau) + \dot{y}_{2vt}(\tau) \\ k_p e_3(\tau) + \dot{y}_{3vt}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.207)}{=} \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{y}_{1a}(\tau) \\ k_p e_2(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \\ k_p e_3(\tau) - \frac{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}{\|\mathbf{g}_{2t}^*\|} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| y_{1t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Od tej chwili cała strategia VFO z podrozdziałów 3.3.1 oraz 3.3.2 pozostaje niezmienną. Jedynymi różnicami między sterownikami VFO dla zadania śledzenia i zadania stabilizacji są inne postaci pola \mathbf{h}^* (por. (3.209) z (3.182)).

STEROWNIK 6 Uwzględniając definicję (3.210), postać sterownika VFO (3.169)-(3.174) dla zadania stabilizacji w punkcie jest następująca (zakładając, że: $h_2 \neq 0$):

$$u_1 \stackrel{(3.169)}{=} k_1(y_{1a} - y_1) + \dot{y}_{1a}, \quad (3.211)$$

$$u_2 \stackrel{(3.174)}{=} \frac{(k_p e_2 + \dot{y}_{2vt}) + (k_p e_3 + \dot{y}_{3vt}) y_1}{1 + y_1^2}, \quad (3.212)$$

gdzie postać y_{1a} wynika z (3.167) oraz (3.210):

$$y_{1a} \triangleq \frac{k_p e_3 + \dot{y}_{3vt}}{k_p e_2 + \dot{y}_{2vt}}, \quad (3.213)$$

postać \dot{y}_{1a} , na podstawie (3.170) oraz (3.209), wyraża się za pomocą wzoru:

$$\dot{y}_{1a} = \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2}, \quad (3.214)$$

gdzie

$$\begin{aligned} h_2 &\stackrel{(3.209)}{=} k_p(y_{2t} - y_2) + \dot{y}_{2vt}, & \Rightarrow & \dot{h}_2 = -k_p \dot{y}_2 + \ddot{y}_{2vt}, \\ h_3 &\stackrel{(3.209)}{=} k_p(y_{3t} - y_3) + \dot{y}_{3vt}, & \Rightarrow & \dot{h}_3 = -k_p \dot{y}_3 + \ddot{y}_{3vt}, \end{aligned}$$

a wirtualne sygnały referencyjne $\dot{y}_{2vt}, \dot{y}_{3vt}$ oraz $\ddot{y}_{2vt}, \ddot{y}_{3vt}$ wynikają z (3.207)-(3.208).



Twierdzenie 3.8 Dany jest stały punkt referencyjny (3.202) oraz obszar w dziedzinie błędu stabilizacji: $\mathcal{E}_{NHCS2}^* \triangleq \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{e}^*(\tau) : h_2(e_2(\tau)) = 0\}$. Zakładając, że:

$$\forall_{0 \leq \tau < \infty} \mathbf{e}^*(\tau) \in \mathcal{E}_{NHCS2}^* \quad (3.215)$$

prawo sterowania VFO (3.211)-(3.212) zastosowane do systemu (3.156) globalnie asymptotycznie prawie stabilizuje błąd (3.203) w zbiorze \mathcal{E}_0 w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau), e_2(\tau), e_3(\tau) = 0$$

dla dowolnego ograniczonego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{E}_{NHCS2}^*$.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.7 rozważmy zachowanie zmiennej orientującej y_1 i pomocniczego błędu orientacji e_{1a} . Podstawienie (3.211) do (3.156) daje następujące równanie:

$$(\dot{y}_{1a} - \dot{y}_1) + k_1(y_{1a} - y_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_{1a} + k_1 e_{1a} = 0,$$

z którego wynika, że błąd e_{1a} zmierza wykładniczo do zera dla $\tau \rightarrow \infty$:

$$e_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_1(\tau) = y_{1a}(\tau). \quad (3.216)$$

Sterowanie orientujące (3.211) gwarantuje zatem spełnienie warunku orientowania (3.166).

Rozważmy ewolucję błędu e^* . Na podstawie (3.203) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = -\dot{q}^*. \quad (3.217)$$

Dodajmy i odejmijmy z prawej strony powyższego równania pole h^* . Z definicji (3.209) możemy zapisać:

$$\dot{e}^* = -\dot{q}^* + h^* - k_p e^* - \dot{q}_{vt}^*,$$

co po uporządkowaniu daje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{e}^* + k_p e^* = r - \dot{q}_{vt}^*, \quad \text{gdzie} \quad r \triangleq h^* - \dot{q}^*. \quad (3.218)$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.7 skorzystamy z następujących relacji (Dodatek B.3):

$$\|r\|^2 = \|h^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (3.219)$$

gdzie $\cos \alpha$ jest zdefiniowany w (3.173) oraz

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} (1 - \cos^2 \alpha(y_1)) = 0. \quad (3.220)$$

Zaproponujmy teraz dodatnio określoną funkcję klasy \mathcal{K}_∞ :

$$V(e^*) \triangleq \frac{1}{2} e^{*T} e^* \in \mathcal{K}_\infty, \quad (3.221)$$

której pochodną można oszacować następująco (dla prostoty zapisu przyjęto oznaczenie: $\gamma(\tau) \triangleq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(y_1(\tau))} \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^{*T} \dot{e}^* \stackrel{(3.218)}{=} e^{*T} [-k_p e^* + r - \dot{q}_{vt}^*] = \\ &\stackrel{(3.205)}{=} e^{*T} [-k_p e^* + r - \delta(e^*) g_{2t}^*] = \\ &= -k_p \|e^*\|^2 + e^{*T} r - \delta(e^*) e^{*T} g_{2t}^* \leq \\ &\leq -k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|r\| + |\delta(e^*)| \|e^*\| \|g_{2t}^*\| = \\ &\stackrel{(3.219)}{=} -k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|h^*\| \gamma + |\delta(e^*)| \|e^*\| \|g_{2t}^*\| = \\ &\stackrel{(3.209)}{=} -k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|k_p e^* + \dot{q}_{vt}^*\| \gamma + |\delta(e^*)| \|e^*\| \|g_{2t}^*\| \leq \\ &\leq -k_p \|e^*\|^2 + \gamma k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| \|\dot{q}_{vt}^*\| \gamma + |\delta(e^*)| \|e^*\| \|g_{2t}^*\| = \\ &\stackrel{(3.205)}{=} -k_p \|e^*\|^2 + \gamma k_p \|e^*\|^2 + \|e^*\| |\delta(e^*)| \|g_{2t}^*\| \gamma + |\delta(e^*)| \|e^*\| \|g_{2t}^*\| = \\ &\stackrel{(3.206)}{=} -k_p \|e^*\|^2 + \gamma k_p \|e^*\|^2 + \eta \gamma \|e^*\|^2 + \eta \|e^*\|^2 = \\ &= -[k_p(1 - \gamma) - \eta(1 + \gamma)] \|e^*\|^2 = -\zeta(\gamma(\tau)) \|e^*\|^2. \end{aligned}$$

Powyższa pochodna jest określona ujemnie, gdy $\zeta(\gamma(\tau))$ jest określone dodatnio, co pozwala zapisać warunek asymptotycznej zbieżności błędu e^* :

$$\zeta(\gamma(\tau)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\tau) < \frac{k_p - \eta}{k_p + \eta}. \quad (3.222)$$

Z uwagi na (3.206), (3.220) oraz (3.216) wnioskuje się, że:

$$\exists \tau_\gamma < \infty : \forall \tau \geq \tau_\gamma \quad \gamma(\tau) < \frac{k_p - \eta}{k_p + \eta} \quad \Rightarrow \quad \|e^*(\tau)\|, \|\dot{e}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|e^*(\tau)\| = 0. \quad (3.223)$$

Dodatkowo dla $\tau \geq \tau_\gamma$ zbieżność $\|e^*(\tau)\|$ do zera ma charakter wykładniczy, ponieważ:

$$\forall \tau \geq \tau_\gamma \quad \left\{ \dot{V}(\tau) \leq -2\zeta V(\tau) \Rightarrow V(\tau) \leq V_0 \exp(-2\zeta\tau) \Rightarrow \|e^*(\tau)\| \leq \|e^*(0)\| \exp(-2\zeta\tau) \right\}.$$

Pokażemy teraz, że również błąd stabilizacji e_1 zmierza asymptotycznie do zera. W tym celu przeanalizujemy zachowanie zmiennej y_1 w przypadku, gdy wektor \mathbf{q}^* zbiega w otoczenie punktu $\mathbf{q}_t^* = [y_{2t} \ y_{3t}]^T$, czyli dla $e_2, e_3 \rightarrow 0$.

Można pomocniczo wykazać, że prawdziwe są następujące relacje (Dodatek B.3):

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} \begin{cases} \dot{y}_2(y_1) = h_2, \\ \dot{y}_3(y_1) = h_3. \end{cases} \quad \stackrel{(3.217)}{\implies} \quad \lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} \begin{cases} \dot{e}_2(y_1) = -h_2, \\ \dot{e}_3(y_1) = -h_3. \end{cases} \quad (3.224)$$

Z modelu (3.156) wynika także, iż $y_1 = \dot{y}_3/\dot{y}_2$. Korzystając zatem z zależności (3.224) oraz z ogólnej postaci pola zbieżności (3.209) możemy zapisać co następuje:

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} y_1 &\stackrel{(3.224)}{=} \frac{h_3}{h_2} \stackrel{(3.209)}{=} \frac{k_p e_3 + \delta y_{1t}}{k_p e_2 + \delta} \Rightarrow \lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} y_1 = \frac{\delta \left(\frac{k_p e_3}{\delta} + y_{1t} \right)}{\delta \left(\frac{k_p e_2}{\delta} + 1 \right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} y_1 = \frac{\nu \frac{e_3}{\|e^*\|} + y_{1t}}{\nu \frac{e_2}{\|e^*\|} + 1} \end{aligned}$$

gdzie $\nu \triangleq -\frac{k_p \|g_{2t}^*\|}{\eta \operatorname{sgn}(e_{20})}$. Zatem w otoczeniu punktu $\mathbf{q}_t^* = [y_{2t} \ y_{3t}]^T$, czyli w granicy dla $\lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0}$ możemy zapisać:

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}, e_2, e_3 \rightarrow 0} y_1 = \frac{y_{1t}}{1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}, e_2, e_3 \rightarrow 0} y_1 = y_{1t}.$$

Wnioskujemy zatem, że zmienna y_1 asymptotycznie zmierza do wartości sygnału y_{1t} , a tym samym błąd stabilizacji e_1 asymptotycznie zmierza do zera:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0. \quad (3.225)$$

Z (3.210) i (3.223) wynika, że: $\|\mathbf{h}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{h}^*(\tau)\| = 0$. Zatem z (3.212) (lub z (3.171)) wynika, że: $u_2(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ oraz $\lim_{\|e^*\| \rightarrow 0} u_2(e^*(\tau)) = 0$. Z założeń (3.215), a także z wniosku, że $\|\dot{e}^*(\tau)\| \in \mathcal{L}_\infty$ wynika, iż $\forall_{h_2 \neq 0} \dot{y}_{1a}(h_2(\tau)) \in \mathcal{L}_\infty$. Uwzględnienie teraz wniosków (3.216) i (3.225) wraz z definicją (3.211) implikuje: $\forall_{h_2 \neq 0} u_1(h_2(\tau)) \in \mathcal{L}_\infty$. \square

Uwaga 3.17 Definicje (3.213) oraz (3.214), a tym samym sterowanie (3.211) wzrastają nieograniczenie w punktach, w których $h_2(\mathbf{e}^*(\bar{\tau})) = 0$. Na podstawie (3.210) możemy stwierdzić, że osiągnięcie przez współrzędną h_2 wartości zerowej jest możliwe w dwóch przypadkach:

P1. gdy jednocześnie $e_2(\bar{\tau}) = 0$ oraz $e_3(\bar{\tau}) = 0$, czyli w punkcie $\mathbf{e}^*(\bar{\tau}) = \mathbf{0}$,

P2. gdy zachodzi $|e_2(\bar{\tau})| = \mu |e_3(\bar{\tau})|$, gdzie $\mu = \frac{\eta}{\sqrt{k_p^2(1+y_{1t}^2)-\eta^2}}$.

Zwróćmy uwagę, iż przypadek P1 można wyeliminować gwarantując, że punkt $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$ nie zostanie osiągnięty w skończonym czasie. W tym celu należy zapewnić, aby $\|\mathbf{e}^*(0)\| \neq 0$, a w trakcie ewolucji systemu spełniony był warunek zbieżności z (3.223). Założenie $\|\mathbf{e}^*(0)\| \neq 0$ nie powoduje utraty ogólności rozważań, gdyż zawsze istnieje pewne sterowanie w torze otwartym, np. $u_1 = 0, u_2 = \text{const}$, które wyprowadza system (3.156) w skończonym czasie z punktu $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$. Spełnienie warunku zbieżności z (3.223) wynika z efektywności procesu orientowania pola $\mathbf{g}_2^*(y_1)$. Zatem aby zagwarantować wykładniczy charakter zbieżności błędu \mathbf{e}^* , zaproponujemy, podobnie jak dla systemów Σ_{UMR} oraz Σ_{NHMmod} , następującą dwuetapową strategię sterowania:

E1. dla $\tau \in [0, \tau_\gamma]$ przyjmij $u_2 \equiv 0$ i zastosuj sterowanie orientujące (3.211) aż do osiągnięcia przez $\gamma(\tau)$ wartości mniejszej od $\frac{k_p - \eta}{k_p + \eta}$; w tym etapie zachodzi: $\forall \tau \leq \tau_\gamma \mathbf{e}^*(\tau) \equiv \mathbf{e}^*(0)$,

E2. dla $\tau \in (\tau_\gamma, \infty)$ zastosuj pełny stabilizator VFO (3.211)-(3.212); w tym etapie zachodzi: $\forall \tau > \tau_\gamma \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \|\mathbf{e}^*(0)\| \exp(-2\zeta\tau)$.

Eliminacja przypadku P2 jest trudniejsza, choć wydaje się, że spełnienie równości $|e_2(\bar{\tau})| = \mu |e_3(\bar{\tau})|$ w stanie przejściowym jest mało prawdopodobne (nie jest to punkt przyciągający). Aby jednak zapewnić ograniczoność sterowania u_1 w sytuacji znalezienia się w stanie przejściowym w pobliżu punktu $h_2 = 0$, można zastosować algorytm tunelowy podobnie, jak to miało miejsce w przypadku zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie (patrz propozycja 3.6). Należy jednak dodatkowo sprawdzać, czy zmniejszanie się wartości współrzędnej h_2 wynika z warunku P1 czy P2, bowiem tylko dla przypadku P2 stosowanie algorytmu tunelowego jest uzasadnione.

Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w uwadze 3.17, wprowadzimy teraz modyfikację, która pozwoli na dobre zdefiniowanie stabilizatora VFO w całej dziedzinie błędu $\mathbf{e}^* \in \mathbb{R}^2$. Skutkiem ubocznym będzie jednak osłabienie własności asymptotycznej stabilizacji na rzecz nieciągłej stabilizacji praktycznej. W tym celu wprowadźmy pojęcie tunelu $\pm\epsilon_1$, $\epsilon_1 > 0$ wokół punktu $h_2 = 0$ i zaproponujemy następujące dodatkowe definicje sygnałów:

$$y_{1a}(\tau) \triangleq \frac{h_3(\tau)}{\epsilon_1 \operatorname{sgn}(-h_2(\tau_{\epsilon_1}))}, \quad (3.226)$$

$$\dot{y}_{1a}(\tau) \triangleq \frac{\dot{h}_3(\tau)}{\epsilon_1 \operatorname{sgn}(-h_2(\tau_{\epsilon_1}))}, \quad (3.227)$$

gdzie τ_{ϵ_1} jest chwilą wejścia wartości $h_2(\tau)$ w tunel $\pm\epsilon_1$ oraz

$$y_{1a}(\tau) = y_{1a} \stackrel{\Delta}{=} y_{1t}, \quad (3.228)$$

$$\dot{y}_{1a}(\tau) = \dot{y}_{1a} \stackrel{\Delta}{=} \dot{y}_{1t} \stackrel{(3.202)}{=} 0. \quad (3.229)$$

Modyfikacja stabilizatora (3.211)-(3.212) wynika teraz z następującej propozycji.

Propozycja 3.7 *Dany jest stały punkt referencyjny (3.202). Odcinkami ciągle prawo sterowania VFO (3.211)-(3.212), w którym:*

$$y_{1a}(\tau), \dot{y}_{1a}(\tau), u_2(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} (3.213), (3.214), (3.212) & \text{dla } |h_2(\mathbf{e}^*(\tau))| > \epsilon_1, \\ (3.226), (3.227), (3.212) & \text{dla } |h_2(\mathbf{e}^*(\tau))| \leq \epsilon_1 \wedge \|\mathbf{e}^*(\tau)\| > \epsilon_2, \\ (3.228), (3.229), 0 & \text{dla } |h_2(\mathbf{e}^*(\tau))| \leq \epsilon_1 \wedge \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon_2 \end{cases} \quad (3.230)$$

gdzie $\epsilon_1 > 0$, a $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ jest założonym otoczeniem punktu $\mathbf{e}^* = \mathbf{0}$, zastosowane do systemu (3.156) globalnie praktycznie stabilizuje błąd (3.203) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^*(\tau)\| \leq \epsilon_2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_1(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon_2$$

dla dowolnego ograniczonego $\mathbf{e}(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$.

Postać sterowania orientującego (3.211) pomimo modyfikacji (3.230) jest nadal aktualna z tą różnicą, że sygnały y_{1a}, \dot{y}_{1a} w niej zawarte są ciągle jedynie w sensie C^0 .

3.3.4 Wyniki badań symulacyjnych

Efektywność działania sterownika VFO zilustrowano wynikami symulacji numerycznych. Wszystkie obliczenia wykonano dla zmiennego kroku całkowania metodą *ODE45 (Dormand-Prince)* w horyzoncie czasowym $\tau \in [0, T]$, $T = 5[s]$. Podczas symulacji, sygnały prędkości \dot{y}_2, \dot{y}_3 sterowanego systemu występujące w definicjach (3.186) oraz (3.214) były obliczane zgodnie z równaniem (3.156).

I. Śledzenie trajektorii. Zadanie śledzenia trajektorii referencyjnej zrealizowano dla trajektorii typu T3 generowanej w oparciu o równanie (3.175) dla dwóch zestawów warunków początkowych sterowanego systemu. Wybór warunków początkowych determinował konieczność (bądź brak konieczności) przejścia przez osobliwość typu $h_2 = 0$.

Symulacje dla pierwszego zestawu warunków początkowych zrealizowano z wykorzystaniem ciągłego sterownika (3.183)-(3.184) przy założeniu (3.187). Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \sin 0.5\tau \\ -0.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} -2.5 \\ 6.1 \\ 7.1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z interpretacją geometryczną, zdefiniowana trajektoria referencyjna jest typu popychająco-orientującego. Przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p =$

5, $k_1 = 10$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają²⁵ rys. 3.74-3.78. Ścieżka referencyjna oraz wynikowa ścieżka sterowanego systemu w przestrzeni \mathbb{R}^3 oraz jej rzut w podprzestrzeń \mathbb{R}^2 pokazane zostały na rys. 3.79 oraz 3.80, gdzie zaznaczono również stan początkowy $\mathbf{q}(0)$.

Symulacje dla drugiego zestawu warunków początkowych determinującego konieczność przejścia przez punkt $h_2 = 0$ zrealizowano z wykorzystaniem odcinkami ciągłego sterownika wynikającego z propozycji 3.6. Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sin 0.5\tau \\ -0.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} -2.5 \\ -6.1 \\ 7.1 \end{bmatrix}.$$

Przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5$, $k_1 = 10$ oraz wartość $\epsilon = 0.6$ określającą szerokość tunelu w otoczeniu punktu $h_2 = 0$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.81-3.85. Ścieżka referencyjna oraz wynikowa ścieżka sterowanego systemu w przestrzeni \mathbb{R}^3 oraz jej rzut w podprzestrzeń \mathbb{R}^2 pokazane zostały na rys. 3.86 oraz 3.87, gdzie zaznaczono również stan początkowy $\mathbf{q}(0)$.

II. Stabilizacja w punkcie. Zadanie stabilizacji w punkcie lub inaczej zadanie śledzenia referencyjnej trajektorii (3.175) zdegenerowanej do stałego punktu (typ trajektorii T4) zrealizowano wykorzystując ciągle *prawie stabilizator* (3.211)-(3.212). Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

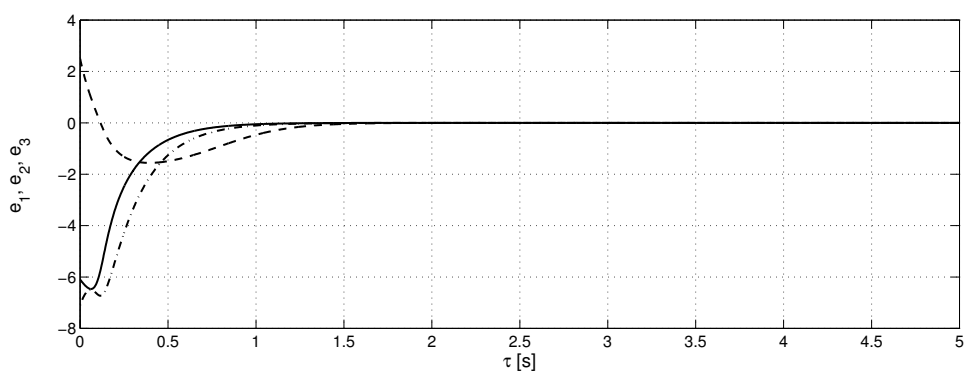
$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_t(0) = \mathbf{q}_t \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} -2.5 \\ 6.1 \\ 7.1 \end{bmatrix}.$$

Podczas symulacji przyjęto następujące wartości współczynników sterownika: $k_p = 5$, $k_1 = 10$ oraz $\eta = 2$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów przedstawiają rys. 3.88-3.92. Wynikowa ścieżka sterowanego systemu w \mathbb{R}^3 oraz jej rzut w podprzestrzeń \mathbb{R}^2 pokazane zostały na rys. 3.93 oraz 3.94, gdzie zaznaczono również stan początkowy $\mathbf{q}(0)$ i końcowy $\mathbf{q}(T)$ systemu. Warto zauważyć, że dla przyjętych wartości parametrów sterownika i sygnałów referencyjnych, warunek zerowania się elementu h_2 ma postać: $|e_2(\bar{\tau})| = 0.295 |e_3(\bar{\tau})|$. Ze względu na charakter zbieżności błędów $e_2(\tau)$ oraz $e_3(\tau)$ (rys. 3.88 oraz rys. 3.92), równość ta nie jest spełniona dla żadnej chwili $\bar{\tau} < \infty$.

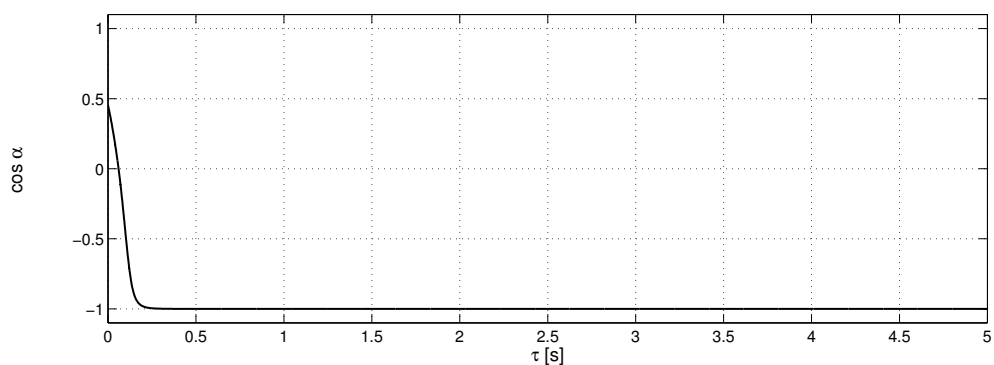
3.3.5 Podsumowanie

W niniejszym przykładzie przedstawiono zastosowanie metody orientowania pól wektorowych dla modelu systemu łańcuchowego z trójwymiarowym wektorem stanu. Zaprezentowane sterowniki VFO gwarantują globalne rozwiązanie dwóch zadań sterowania: asymptotyczne śledzenie dopuszczalnych trajektorii zmiennych w czasie oraz asymptotyczną (a także praktyczną) stabilizację w punkcie. Zaproponowano dwa rodzaje praw sterowania

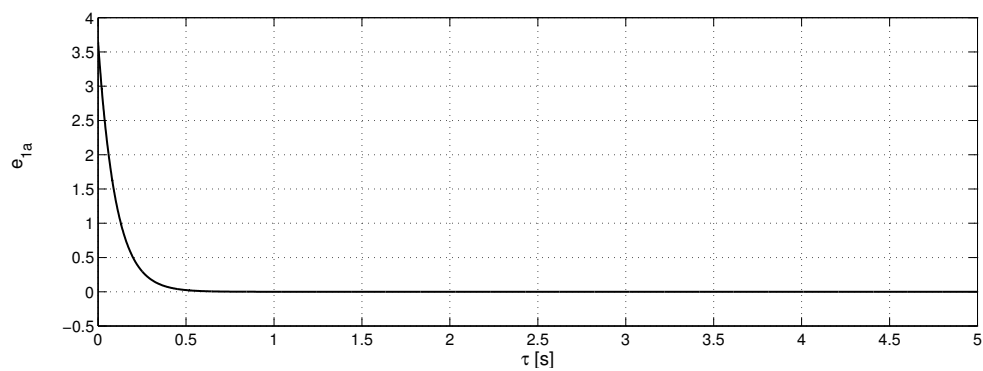
²⁵Ze względu na abstrakcyjny charakter systemu łańcuchowego, wszystkie sygnały prezentowane w tym podpunkcie podawane są z pominięciem jednostek.



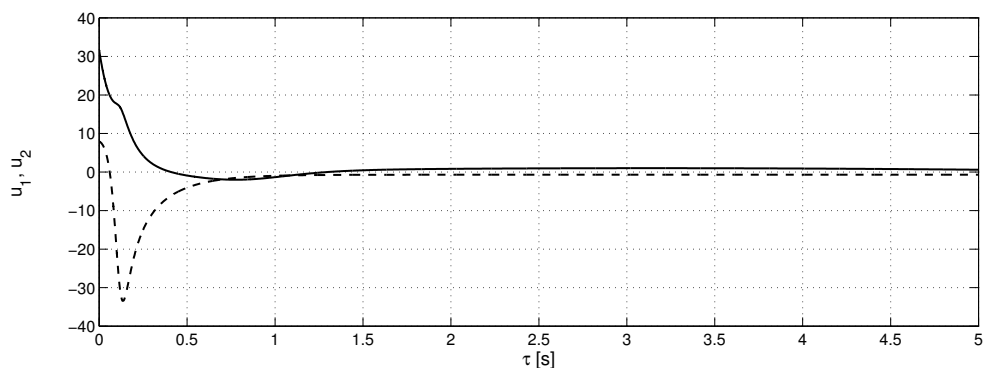
Rys. 3.74: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – błędy śledzenia: e_1 (- -), e_2 (-), e_3 (-.-).



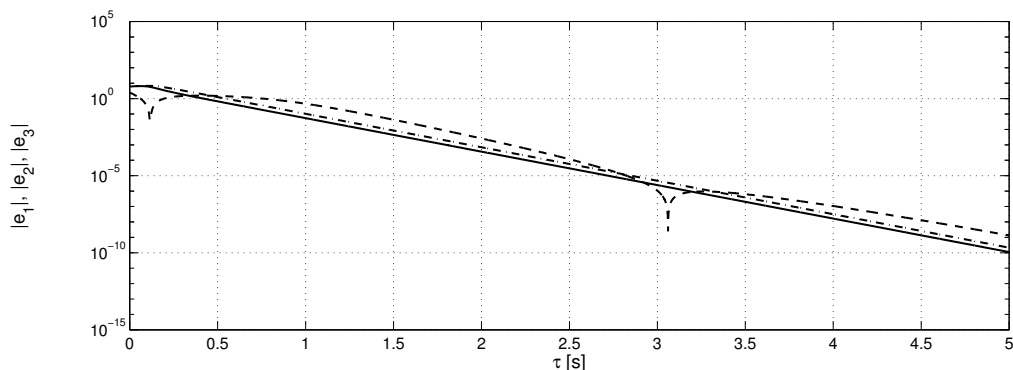
Rys. 3.75: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



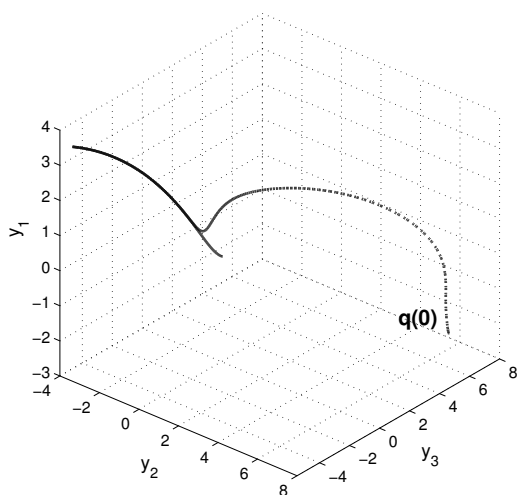
Rys. 3.76: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – pomocniczy błąd orientacji e_{1a} .



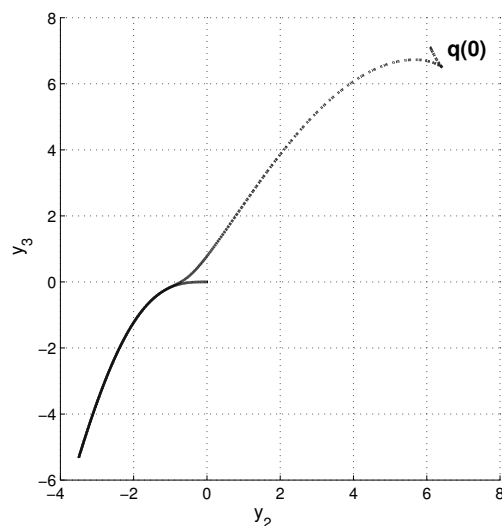
Rys. 3.77: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



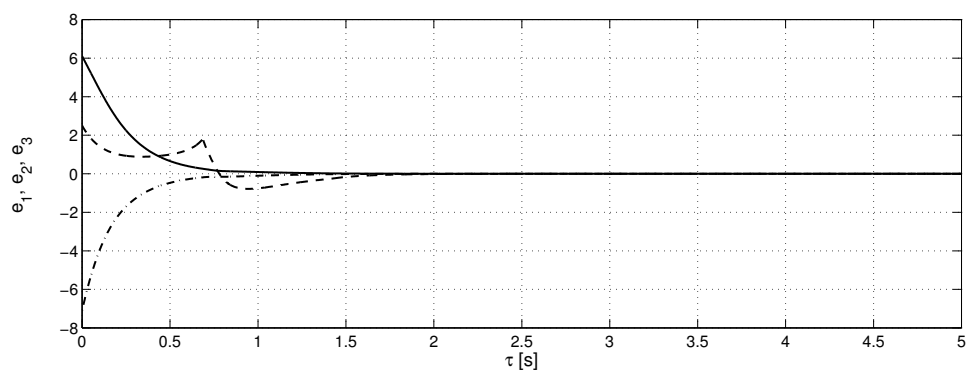
Rys. 3.78: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_1|$ (- -), $|e_2|$ (-), $|e_3|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



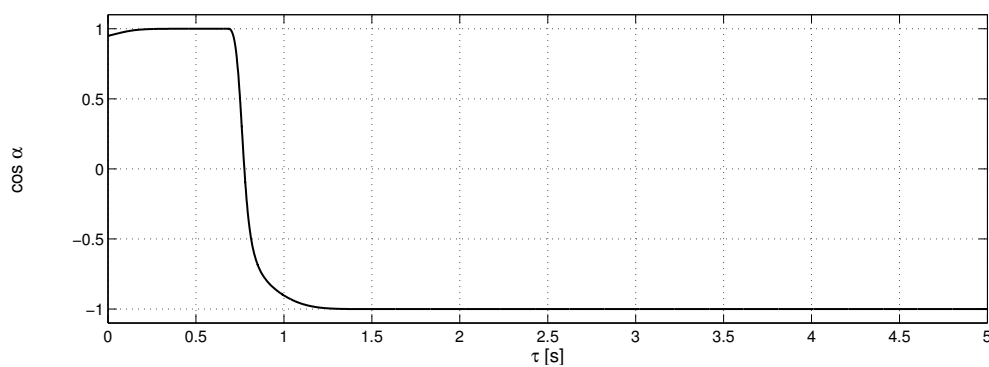
Rys. 3.79: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego oraz ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni \mathbb{R}^3 (zaznaczono początkowy stan systemu $q(0)$).



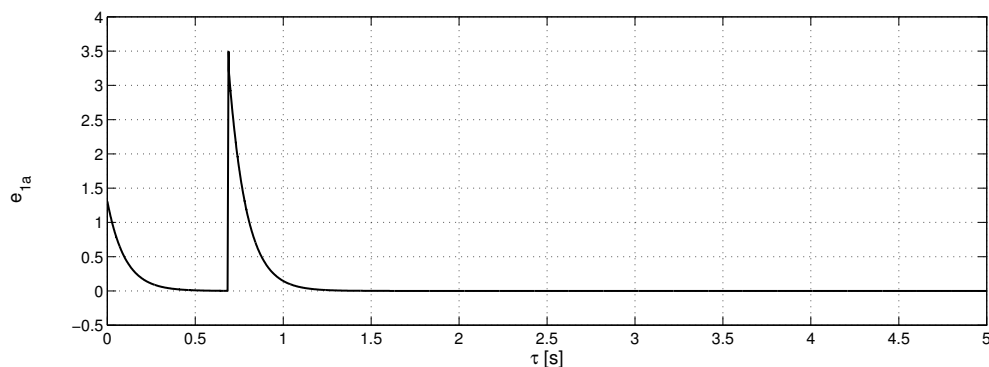
Rys. 3.80: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego oraz ścieżka referencyjna (linia ciągła) jako rzut w przestrzeni \mathbb{R}^2 (zaznaczono początkowy stan systemu $q(0)$).



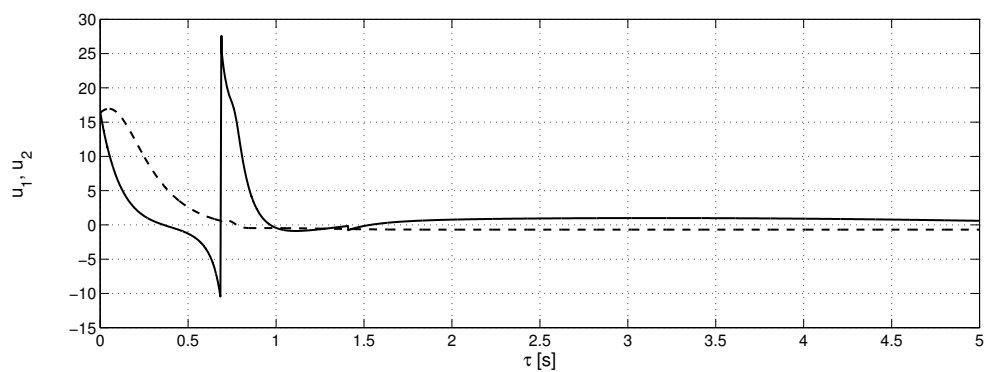
Rys. 3.81: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – błędy śledzenia: e_1 (- -), e_2 (-), e_3 (-.-).



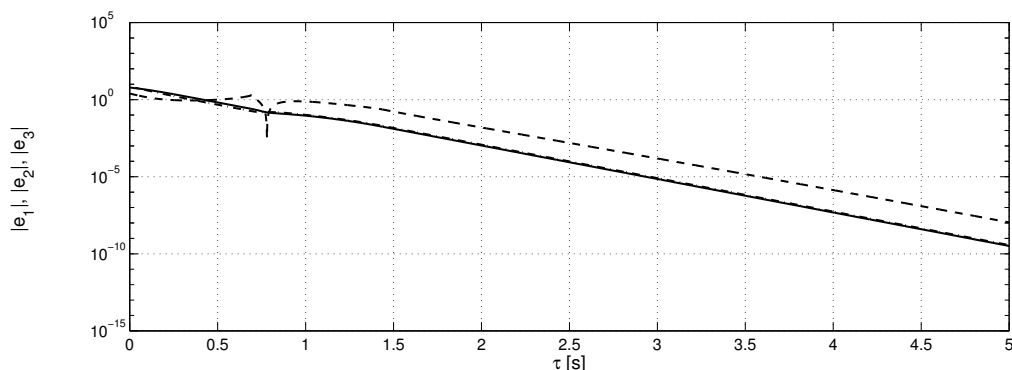
Rys. 3.82: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



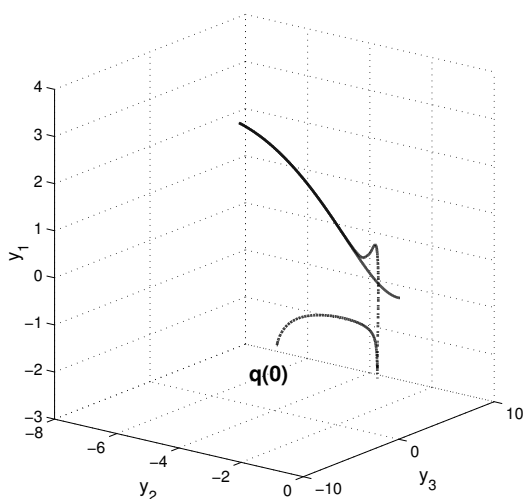
Rys. 3.83: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – pomocniczy błąd orientacji e_{1a} .



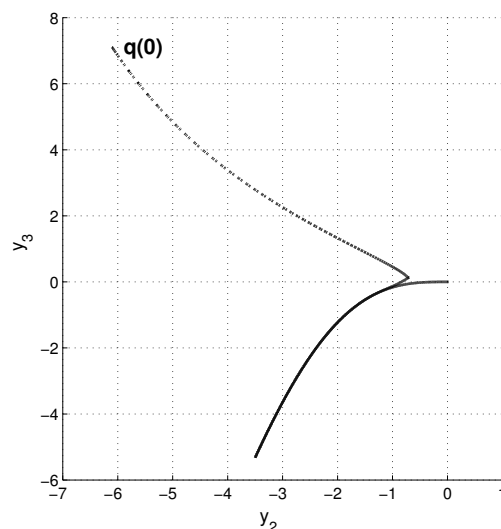
Rys. 3.84: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



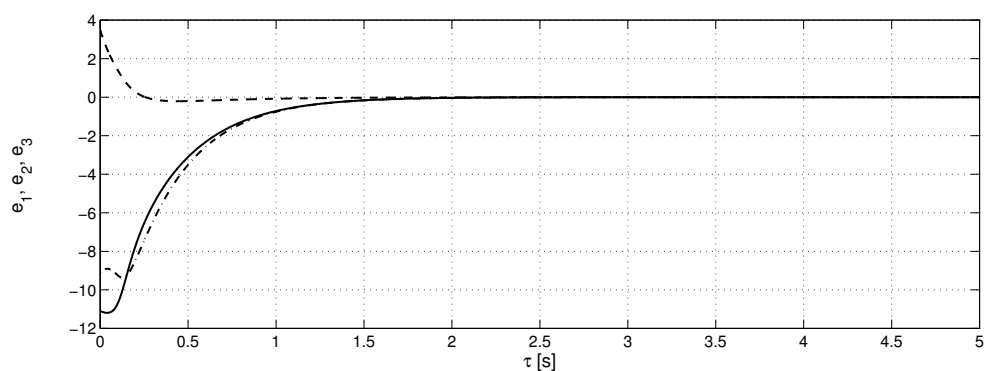
Rys. 3.85: $\Sigma_{NHCSmod}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_1|$ (- -), $|e_2|$ (-), $|e_3|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



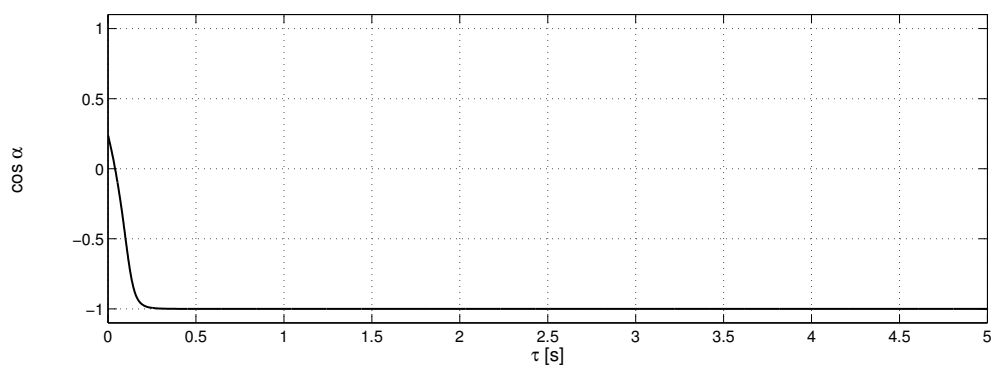
Rys. 3.86: $\Sigma_{NHCSmod}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego oraz ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni \mathbb{R}^3 (zaznaczono początkowy stan systemu $\mathbf{q}(0)$).



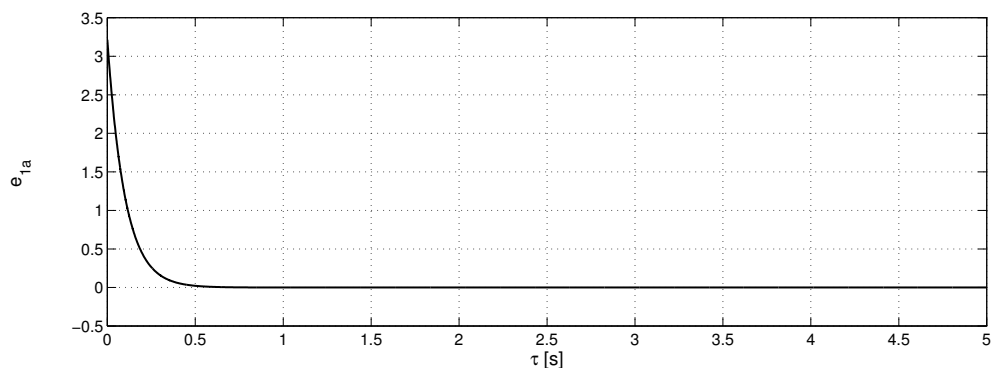
Rys. 3.87: $\Sigma_{NHCSmod}$: trajektoria T3 (z przejściem przez $h_2 = 0$) – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego oraz ścieżka referencyjna (linia ciągła) jako rzut w przestrzeni \mathbb{R}^2 (zaznaczono początkowy stan systemu $\mathbf{q}(0)$).



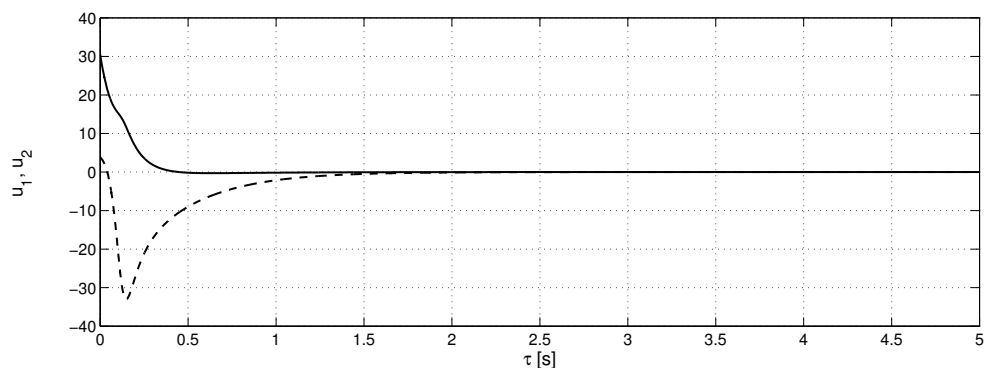
Rys. 3.88: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T4 – błędy stabilizacji: e_1 (- -), e_2 (-), e_3 (-.-).



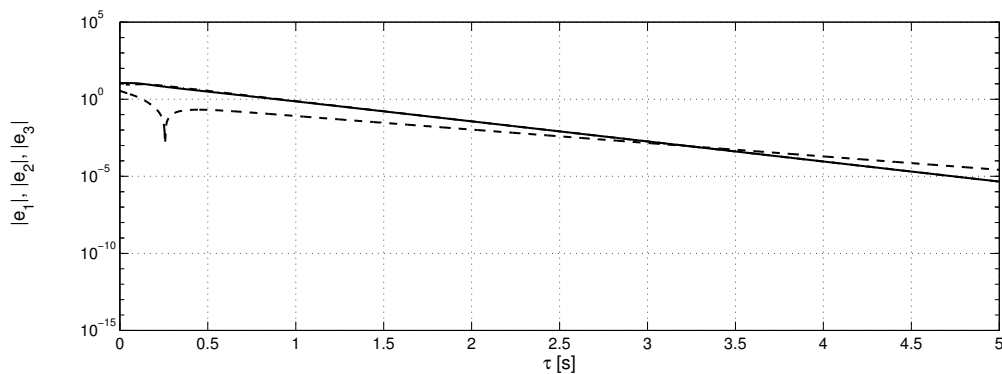
Rys. 3.89: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T4 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



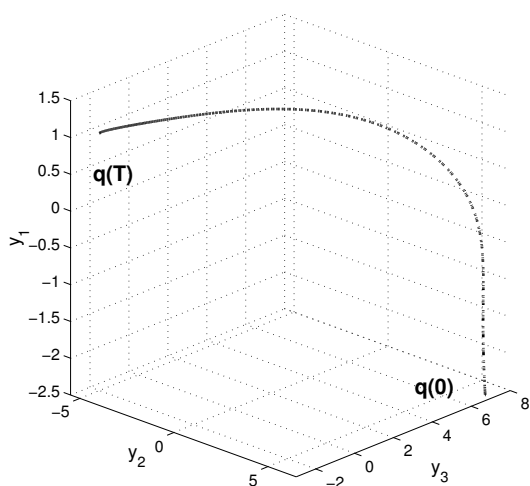
Rys. 3.90: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T4 – pomocniczy błąd orientacji e_{1a} .



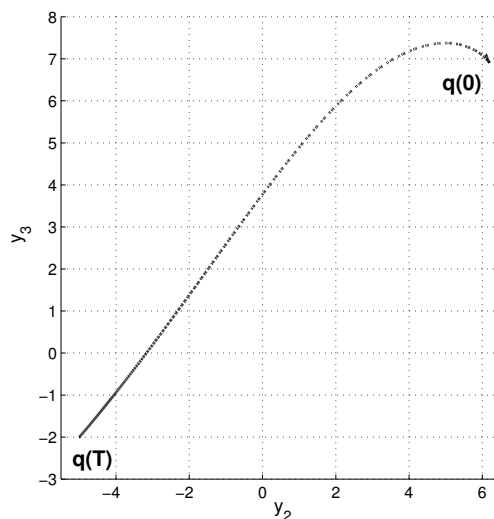
Rys. 3.91: $\Sigma_{NHCS_{mod}}$: trajektoria T4 – sygnały sterujące: u_1 (-), u_2 (- -).



Rys. 3.92: $\Sigma_{NHCSmod}$: trajektoria T4 – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_1|$ (- -), $|e_2|$ (-), $|e_3|$ (-.) w skali logarymicznej.



Rys. 3.93: $\Sigma_{NHCSmod}$: trajektoria T4 – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego w przestrzeni \mathbb{R}^3 (zaznaczono początkowy $q(0)$ i końcowy $q(T)$ stan systemu).



Rys. 3.94: $\Sigma_{NHCSmod}$: trajektoria T4 – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego jako rzut w przestrzeni \mathbb{R}^2 (zaznaczono początkowy $q(0)$ i końcowy $q(T)$ stan systemu).

dla każdego z zadań: ciągle sterowniki VFO wyłączające pewne punkty z dziedziny błędu \mathbf{e} oraz odcinkami ciągle sterowniki VFO dobrze określone w całej dziedzinie błędu regulacji. Struktury przedstawionych ciągłych sterowników VFO dedykowanych do zadania śledzenia i zadania stabilizacji są jednakowe z jedyną różnicą wynikającą z konstrukcji pola wektorowego zbieżności \mathbf{h} . Z powodu niepełnej kierowalności i orientowalności pola-generatora systemu łańcuchowego, zaproponowano metodę przechodzenia przez kierunki osobliwe stosując algorytm tunelowy zaproponowany w pracy [Dul00]. Poprzez analogie wynikające z interpretacji geometrycznej, otrzymane wyniki symulacyjne mogą zostać bezpośrednio skonfrontowane z wynikami uzyskanymi dla kanonicznego przykładu robota jednokołowego czy manipulatora nieholonomicznego. Dzięki temu, wpływ wartości parametrów projektowych na jakość stanów przejściowych w układzie sterowania staje się zrozumiała i wręcz intuicyjna, pomimo abstrakcyjnego charakteru sterowanego systemu.

3.4 System afiniczny z dryfem

Dotychczasowe przykłady zastosowania metody VFO ograniczone były do klasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych o specyficznych własnościach modelu. Nasuwa się jednak pytanie, czy metodologię orientowania pól wektorowych można byłoby zastosować do szerszej grupy systemów dynamicznych. W istocie jest to pytanie o stopień ogólności podejścia opartego o metodę VFO. W bieżącym podpunkcie spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie poprzez próbę wykorzystania algorytmu VFO do wyprowadzenia prawa sterowania dla dryfowych systemów afinicznych, w szczególności zaś rozważając, jako przykład dobrze znany z teorii sterowania, liniowy system SIMO.

Zastosowanie jednolitego podejścia do problemu projektowania praw sterowania dla tak różnych jakościowo systemów jak bezdryfowe układy nieholonomiczne oraz holonomiczne dryfowe systemy afiniczne jest pewną próbą unifikacji rozwiązania problemu sterowania łączącą liniową i nieliniową teorię regulacji. Jest to też próba znalezienia i zwrócenia uwagi na pewne wspólne cechy wspomnianych systemów, która może ukazać w nowym świetle kierunek badań dotyczący systematycznych metod strojenia sterowników nieliniowych, tak ważny z praktycznego punktu widzenia.

Rozważmy następujące liniowe równanie różniczkowe:

$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x + a_0x = bv, \quad (3.231)$$

gdzie $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}$ są parametrami modelu, a $v \in \mathbb{R}$ jest sygnałem wejściowym. Przyjmując dla systemu (3.231) zmienne stanu fazowe: $x_1 \triangleq x$, $x_2 \triangleq \dot{x}$, $x_3 \triangleq \ddot{x}$ oraz zakładając dostępność pełnego wektora stanu na wyjściu systemu: $\mathbf{y} \triangleq \mathbf{x}$, uzyskujemy następujący klasyczny model w przestrzeni stanu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}v, \quad (3.232)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad (3.233)$$

gdzie

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.234)$$

Skupimy odtąd uwagę na równaniu stanu (3.232), które można zapisać w następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}v \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} v, \quad (3.235)$$

gdzie $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{x}$ jest dryfem, a \mathbf{g} jest stałym polem-generatorem systemu. Aby uczynić analizę powyższego systemu jak najbardziej spójną, z punktu widzenia metodologii VFO, z analizą dotychczasowych przykładów, zdefiniujemy pomocniczo i bez utraty ogólności rozważań nowe zmienne stanu²⁶ oraz sygnał wejściowy v jak następuje:

$$q_1 \triangleq x_3, \quad q_2 \triangleq x_2, \quad q_3 \triangleq x_1, \quad (3.236)$$

$$v \triangleq \frac{1}{b} (a_0x_1 + a_1x_2 + a_2x_3) + u_1, \quad (3.237)$$

gdzie $u_1 \in \mathbb{R}$ jest nowym wejściem sterującym. Podstawiając (3.237) do (3.235) otrzymujemy następującą postać modelu rozważanego systemu we współrzędnych $\mathbf{q} \triangleq [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\Sigma_{ADS} : \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \quad (3.238)$$

Od tej chwili uwaga skupiona będzie na systemie Σ_{ADS} , dla którego wyprowadzone zostanie prawo sterowania VFO, poprzez analogię do wszystkich dotychczas rozważanych przykładów. Zatem ostateczna postać sterowania v dla systemu oryginalnego (3.235) wynikać będzie z równania (3.237) i zaprojektowanego niżej składnika wynikającego z metodologii VFO.

Model (3.238) należy do grupy systemów holonomicznych, którego ogólną strukturę można zapisać następująco: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1 u_1 + \mathbf{f}_2(\mathbf{q})$, gdzie $\mathbf{g}_1 \triangleq [1 \ 0 \ 0]^T$ jest stałym polem-generatorem, a $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}) \triangleq [0 \ q_1 \ q_2]^T$ stanowi dryf systemu. Porównując (3.238) z ogólną postacią bezdryfowych systemów Σ (patrz (2.1)) łatwo zauważyć, że pole wektorowe $\mathbf{f}_2(\mathbf{q})$ można równoważnie potraktować jako iloczyn $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})u_2$, w którym $u_2 \equiv 1$ oraz $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{q})$. Zatem pole wektorowe $\mathbf{f}_2(\mathbf{q})$ będzie od tej chwili interpretowane jako drugie pole-generator systemu Σ_{ADS} . Przyjęcie takiej interpretacji ma jedynie charakter pomocniczy. Ułatwi ono ukazanie daleko idących analogii w zastosowaniu metodologii VFO do modelu (3.238), w świetle wcześniej przytoczonych przykładów. Aby zaznaczyć jednak, że $\Sigma_{ADS} \notin \Sigma$, w dalszej części tego podrozdziału pozostawione zostanie oznaczenie $\mathbf{f}_2(\mathbf{q})$ zamiast oznaczenia $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$.

²⁶Wynikające jedynie z potrzeby zamiany kolejności współrzędnych w wektorze \mathbf{x} .

Przywołując ogólną postać modeli podklasy (2.1)-(2.2) możemy zapisać poprzez analogię:

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_2(q_{1,2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2(q_1) \\ f_3(q_2) \end{bmatrix} \stackrel{(3.238)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_2^*(q_{1,2}) \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}^* \triangleq \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.239)$$

W interpretacji, w której przyjmujemy: $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \cdot 1$ powiemy, że system (3.238) jest *popychany* zawsze w strategii *do przodu*²⁷ ($u_2 \equiv +1$). Zatem dryf w (3.238) spełnia między innymi taką rolę, która w podklasie Σ należy do sterowania popychającego u_2 . W takiej interpretacji nie mamy wpływu na wartość sterowania popychającego u_2 , ale możemy zmieniać kierunek i orientację, wzdłuż której proces popychania²⁸ zachodzi. Kierunek popychania wzdłuż pola \mathbf{f}_2 jest bowiem funkcją stanu \mathbf{q} systemu. Sterowanie u_1 występujące w (3.238) ma bezpośredni wpływ na ewolucję zmiennej q_1 , a pośrednio (poprzez relację $q_2(\tau) = q_2(0) + \int_0^\tau q_1(\xi)d\xi$) także na ewolucję zmiennej q_2 , które z kolei determinują bieżący kierunek i orientację pola $\mathbf{f}_2(q_{1,2})$ w \mathbb{R}^2 . Wynika z tego, że u_1 jest sterowaniem orientującym, którego rolą będzie taka zmiana orientacji pola-dryfu, by stan systemu (3.238) zbiegał do stanu referencyjnego. W tym momencie zastosowanie strategii VFO staje się przejrzyste. Przeprowadzimy zatem podobną analizę systemu Σ_{ADS} , jak w przypadku wszystkich dotychczas rozważanych systemów z rodziny Σ .

Sprawdźmy cztery warunki konieczne stosowalności metody VFO.

Warunek **W1**: można pokazać, że $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_{\mathbb{C}\mathbb{R}^3}$ system Σ_{ADS} jest w pełni sterowalny:

$$\det(\mathbf{C}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(\mathbf{C}) = 3 = \dim(\mathbf{q}),$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą sterowalności:

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & [\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2(q_{1,2})] & [\mathbf{f}_2(q_{1,2}), [\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2(q_{1,2})]] \end{bmatrix} \stackrel{(3.238)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.240)$$

Warunek **W2**: z postaci pola $\mathbf{f}_2(q_{1,2})$ wynika, że $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ $\|\mathbf{f}_2(q_{1,2})\| > 0$ i wszystkie punkty $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ poza zerem są regularne. Z tego względu, iż w naszej interpretacji sterowanie popychające jest tożsamościowo równe jeden, degenerowanie się dryfu w początku układu współrzędnych nie stwarza żadnego problemu w procesie sterowania metodą VFO²⁹. Dlatego nie ma potrzeby w tym przypadku wyłączenia punktu $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ z przestrzeni konfiguracyjnej. Zatem dla systemu (3.238) warunek **W2** nie jest warunkiem koniecznym stosowalności metody VFO.

Warunek **W3**: dla ograniczonych wartości q_1, q_2 , czyli dla podprzestrzeni konfiguracyjnej

$$\mathcal{Q}'_{ADS} \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : |q_1|, |q_2| < \infty\} \quad (3.241)$$

pole $\mathbf{f}_2^*(q_{1,2})$ jest ograniczone.

Warunek **W4**: zmiana wartości zmiennych q_1 oraz q_2 implikuje zmianę orientacji pola

²⁷W istocie winniśmy powiedzieć, że system (3.238) *dryfuje*.

²⁸Lub inaczej w tym przypadku: *proces dryfowania*.

²⁹Warunek **W2** wynika między innymi z zapewnienia ograniczoności współczynnika $k_2 \triangleq 1/\|\mathbf{g}_2^*\|$ w definicji sterowania popychającego, które tutaj (w przyjętej interpretacji) jest tożsamościowo równe jeden.

$\mathbf{f}_2^*(q_{1,2})$ w \mathbb{R}^2 :

$$\cos \alpha = \frac{z_1 q_1 + z_2 q_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \Rightarrow \alpha = \alpha(q_{1,2}) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial q_{1,2}} \neq 0,$$

gdzie $\alpha \triangleq \angle(\mathbf{f}_2^*(q_{1,2}), \mathbf{z})$, a $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T \in \mathbb{R}^2$ jest pewnym polem odniesienia.

Przynależność poszczególnych sygnałów modelu Σ_{ADS} do odpowiednich zbiorów z punktu widzenia metodologii VFO rozważymy w oparciu o przyjęte w rozdziale 2 definicje. Postać modelu (3.238) wskazuje, że zmiennymi orientującymi są q_1 oraz q_2 : $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_o$, przy czym tylko q_1 jest zmienną orientującą sterowaną bezpośrednio. Warto podkreślić, iż z drugiego równania w (3.238) wynika również, że $q_2(\tau) = q_2(0) + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi$. Zatem zmiana wartości zmiennej q_1 pozwala na swobodną zmianę kierunku i orientacji pola $\mathbf{f}_2(\mathbf{q})$, które jest w pełni kierowalne i w pełni orientowalne w \mathbb{R}^2 . Z pierwszego równania w (3.238) wynika ponadto, że sygnał $u_1 \in \mathcal{U}_o$ jest sterowaniem orientującym. Ze względu na drugie równanie w (3.238), rozważany system nie jest w pełni dekomponowalny na podsystem wyłączenie orientujący i podsystem wyłącznie popychany³⁰. Widać bowiem, iż ewolucja zmiennej q_2 będąca skutkiem działania niezerowego dryfu \mathbf{f}_2 powoduje jednocześnie zmianę kierunku (orientacji) pola \mathbf{f}_2 . Wynika z tego, że czyste popychanie nie jest możliwe w systemie Σ_{ADS} . Ostatecznie, przynależność sygnałów systemu (3.238) do odpowiednich zbiorów można zapisać w postaci zestawu następujących relacji:

$$\Sigma_{ADS} : \begin{cases} q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_o, \\ q_3 \notin \mathcal{Q}_o, \\ u_1, u_2 \equiv 1 \in \mathcal{U}_o, \\ u_2 \equiv 1 \in \mathcal{U}_p, \\ U_o \cap U_p = \{u_2 \equiv 1\}. \end{cases} \quad (3.242)$$

3.4.1 Wykorzystanie metodologii VFO

Przyjmijmy ogólną postać pola \mathbf{h} :

$$\mathbf{h}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ \mathbf{h}^*(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{h}^*(\cdot) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.243)$$

Do systemu Σ_{ADS} zastosujemy teraz ogólną strategię VFO, przy czym tym razem skorzystamy z zależności (2.13) przyjmując dodatkowo, że $k(\tau) \equiv +1$. Zgodnie z (2.13) szukamy takiego sterowania u_1 , które gwarantuje spełnienie relacji:

$$u_1 : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{q}^*(\tau) = \mathbf{h}^*(\cdot) \stackrel{(3.239, 3.243)}{\implies} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.244)$$

która określa w tym przypadku tzw. *warunki orientowania*. Z postaci modelu (3.238) wnioskujemy, że powyższe relacje nie mogą być spełnione natychmiastowo ze względu na całkowitą zależność zmiennej q_1 od sterowania orientującego u_1 oraz ze względu na całkowitą

³⁰Lub tutaj: podsystem wyłącznie dryfujący.

zależność zmiennej q_2 od q_1 . Z tego względu wprowadzimy następujące *pomocnicze zmienne orientacji*:

$$q_{2a}(\cdot) \triangleq h_3(\cdot), \quad q_{1a}(\cdot) \triangleq h_2(\cdot) \quad (3.245)$$

oraz *pomocnicze błędy orientacji*:

$$e_{2a}(\tau) \triangleq q_{2a}(\cdot) - q_2(\tau), \quad e_{1a}(\tau) \triangleq q_{1a}(\cdot) - q_1(\tau). \quad (3.246)$$

Spełnienie (3.244) wymaga teraz znalezienia takiego sterowania u_1 , aby zapewnić asymptotyczną zbieżność błędów e_{2a} oraz e_{1a} do zera. Zapewnienie zbieżności dla błędu e_{1a} osiągniemy proponując następującą postać współrzędnej $h_1(\cdot)$ pola zbieżności \mathbf{h} :

$$h_1(e_{1a}, \dot{q}_{1a}) \triangleq k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau) \quad (3.247)$$

oraz przyjmując następującą postać sterowania orientującego:

$$u_1 \triangleq h_1(e_{1a}, \dot{q}_{1a}) \stackrel{(3.247)}{\implies} u_1 \triangleq k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau), \quad (3.248)$$

gdzie $k_1 > 0$ jest współczynnikiem projektowym, a sygnał sprzężenia wyprzedzającego \dot{q}_{1a} ma następującą postać ogólną:

$$\dot{q}_{1a}(\tau) \stackrel{(3.245)}{=} \dot{h}_2(\cdot). \quad (3.249)$$

Zbieżność błędu e_{2a} natomiast można osiągnąć pośrednio przywołując równanie $\dot{q}_2 = q_1$ z modelu (3.238) i definiując w (3.245) element $h_2(\cdot)$ jak następuje:

$$h_2(e_{2a}, \dot{q}_{2a}) \triangleq k_2 e_{2a}(\tau) + \dot{q}_{2a}(\tau), \quad \text{gdzie} \quad \dot{q}_{2a}(\tau) \stackrel{(3.245)}{=} \dot{h}_3(\cdot). \quad (3.250)$$

Przedstawioną metodologię VFO podsumowuje następująca propozycja.

Propozycja 3.8 (Sterownik VFO dla systemu Σ_{ADS} – postać ogólna) *Ogólna postać sterownika VFO dla modelu (3.238) gwarantująca rozwiązanie zadania śledzenia oraz zadania stabilizacji jest następująca:*

$$u_1 \triangleq k_1(q_{1a} - q_1) + \dot{q}_{1a},$$

gdzie $k_1 > 0$, a q_{1a} oraz \dot{q}_{1a} zdefiniowano ogólnymi zależnościami (3.245) oraz (3.249).

Jak widać, w tym szczególnym przypadku sterownik VFO składa się tylko ze sterowania orientującego. Poniżej, w opraciu o propozycję 3.8, przedstawiona zostanie ostateczna postać prawa sterowania VFO, słuszna zarówno dla zadania śledzenia jak i stabilizacji w punkcie.

3.4.2 Prawo sterowania VFO

Ze względu na własność liniowości systemu Σ_{ADS} oraz jego holonomiczną naturę, rozważymy tutaj jednocześnie oba zadania sterowania – śledzenie i stabilizację w punkcie. Oba problemy bowiem mogą zostać rozwiązane w tym przypadku w wyniku zastosowania tego samego sterownika VFO.

Rozważmy model (3.238) oraz ograniczoną trajektorię referencyjną $\mathbf{q}_t(\tau)$, $\tau \in [0, T)$, gdzie $T > 0$ jest horyzontem czasowym śledzenia:

$$\mathbf{q}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} q_{1t}(\tau) \\ q_{2t}(\tau) \\ q_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} q_{1t}(\tau) \\ \mathbf{q}_t^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} q_{1t}(0) + \int_0^\tau u_{1t}(\xi) d\xi \\ q_{2t}(0) + q_{1t}(0)\tau + \iint_0^\tau u_{1t}(\xi) d\xi^2 \\ q_{3t}(0) + q_{2t}(0)\tau + 0.5q_{1t}(0)\tau^2 + \iiint_0^\tau u_{1t}(\xi) d\xi^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.251)$$

przy czym zakładamy, że

$$u_{1t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty, \mathcal{C}^1. \quad (3.252)$$

W przypadku trajektorii zdegenerowanej do stałego punktu referencyjnego, w definicji (3.251) należy przyjąć $u_{1t} \equiv 0$ oraz $q_{1t}(0), q_{2t}(0) \equiv 0$ otrzymując:

$$\mathbf{q}_t(\tau) = \mathbf{q}_t \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{3t}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{3t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.253)$$

Przywołując fakt, iż zmienne stanu $\mathbf{q}(\tau)$ są zmiennymi fazowymi możemy od razu zapisać:

$$\dot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{q}_{1t}(\tau) \\ \dot{q}_{2t}(\tau) \\ \dot{q}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.238)}{=} \begin{bmatrix} u_{1t}(\tau) \\ q_{1t}(\tau) \\ q_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.254)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1t}(\tau) \\ \ddot{q}_{2t}(\tau) \\ \ddot{q}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{1t}(\tau) \\ \dot{q}_{1t}(\tau) \\ \dot{q}_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.254)}{=} \begin{bmatrix} \dot{u}_{1t}(\tau) \\ u_{1t}(\tau) \\ q_{1t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.255)$$

$$\dddot{\mathbf{q}}_t(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{q}_{1t}(\tau) \\ \ddot{q}_{2t}(\tau) \\ \ddot{q}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{1t}(\tau) \\ \ddot{q}_{1t}(\tau) \\ \ddot{q}_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \stackrel{(3.255)}{=} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{1t}(\tau) \\ \dot{u}_{1t}(\tau) \\ u_{1t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.256)$$

Zdefiniujmy błąd odtwarzania sygnału referencyjnego:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ e_2(\tau) \\ e_3(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ \mathbf{e}^*(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{q}_t(\tau) - \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_{1t}(\tau) - q_1(\tau) \\ q_{2t}(\tau) - q_2(\tau) \\ q_{3t}(\tau) - q_3(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.257)$$

który dla przypadku trajektorii zdegenerowanej do stałego punktu referencyjnego ma postać:

$$\mathbf{e}(\tau) \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q}(\tau) \stackrel{(3.253)}{=} \begin{bmatrix} -q_1(\tau) \\ -q_2(\tau) \\ q_{3t} - q_3(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.258)$$

Określmy teraz szczegółowo wyrażenia definiujące ogólną postać sterowania orientującego u_1 przedstawionego w propozycji 3.8. W tym celu zdefiniujemy pole \mathbf{h} . Aby to uczynić,

pozostaje określić jawną postać współrzędnej $h_3(\cdot)$. Ze tego względu, iż zmienna q_3 nie jest zmienną orientującą, przyjmijmy (podobnie jak to czyniliśmy we wszystkich dotychczasowych przykładach) następującą definicję:

$$h_3(e_3, \dot{q}_{3t}) \triangleq k_3 e_3(\tau) + \dot{q}_{3t}(\tau), \quad (3.259)$$

gdzie $k_3 > 0$ jest parametrem projektowym, a sygnały \dot{q}_{3t} oraz e_3 wynikają bezpośrednio z (3.254) oraz (3.257) (lub (3.258)). Pełna postać pola zbieżności \mathbf{h} przedstawia się ponownie jako liniowa kombinacja odpowiednich błędów odtwarzania i sygnałów wyprzedzających:

$$\mathbf{h}(e_{1a}, e_{2a}, e_3, \dot{q}_{1a}, \dot{q}_{2a}, \dot{q}_{3t}) \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau) \\ k_2 e_{2a}(\tau) + \dot{q}_{2a}(\tau) \\ k_3 e_3(\tau) + \dot{q}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.260)$$

Korzystając z faktu, iż q_3, q_2 i q_1 są zmiennymi fazowymi oraz wykorzystując (3.259), definicje (3.247) i (3.250) możemy określić bardziej szczegółowo i wyrazić je jako funkcje sygnałów referencyjnych, błędu odtwarzania pozycji i jego pochodnych lub jako funkcje sygnałów referencyjnych, wszystkich błędów odtwarzania i sterowania referencyjnego (Dodatek B.4):

$$h_2 \stackrel{(3.250, 3.259)}{=} (k_2 + k_3)\dot{e}_3 + k_2 k_3 e_3 + \ddot{q}_{3t} = (k_2 + k_3)e_2 + k_2 k_3 e_3 + q_{1t}, \quad (3.261)$$

$$\begin{aligned} h_1 &\stackrel{(3.247, 3.259)}{=} (k_1 + k_2 + k_3)\ddot{e}_3 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)\dot{e}_3 + k_1 k_2 k_3 e_3 + \ddot{\ddot{q}}_{3t} = \\ &= (k_1 + k_2 + k_3)e_1 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)e_2 + k_1 k_2 k_3 e_3 + u_{1t}, \end{aligned} \quad (3.262)$$

gdzie z (3.257) mamy: $\dot{e}_3 = \dot{q}_{3t} - \dot{q}_3$ oraz $\ddot{e}_3 = \ddot{q}_{3t} - \ddot{q}_3$. W efekcie, pole z (3.260) może zostać alternatywnie wyrażone w następujący sposób:

$$\mathbf{h}(e_3, q_{3t}) = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_3)\ddot{e}_3(\tau) + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)\dot{e}_3(\tau) + k_1 k_2 k_3 e_3(\tau) + \ddot{\ddot{q}}_{3t}(\tau) \\ (k_2 + k_3)\dot{e}_3(\tau) + k_2 k_3 e_3(\tau) + \ddot{q}_{3t}(\tau) \\ k_3 e_3(\tau) + \dot{q}_{3t}(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.263)$$

lub jako:

$$\mathbf{h}(\mathbf{e}, \mathbf{q}_t) = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_3)e_1(\tau) + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)e_2(\tau) + k_1 k_2 k_3 e_3(\tau) + u_{1t}(\tau) \\ (k_2 + k_3)e_2(\tau) + k_2 k_3 e_3(\tau) + q_{1t}(\tau) \\ k_3 e_3(\tau) + q_{2t}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (3.264)$$

Warto zwrócić uwagę na *kaskadową* strukturę otrzymanych postaci pola zbieżności (3.263) oraz (3.264). Należy jednocześnie podkreślić, iż w zaproponowanej postaci pola \mathbf{h} mamy: $h_2 \neq \dot{h}_3$ oraz $h_1 \neq \dot{h}_2$ pomimo, iż q_3, q_2 i q_1 są zmiennymi fazowymi.

Podobnie jak w rozważanych wcześniej przykładach systemów nieholonomicznych, składowa h_1 określa sposób zbieżności dla zmiennej orientującej q_1 . Dodatkowo składowa h_2 określa tutaj sposób zbieżności dla zmiennej orientującej q_2 . Ponownie poprzez analogię wnioskujemy, iż wprowadzenie propozycji (3.260) pozwala na powiększenie się błędów e_1 oraz e_2 w początkowej fazie stanu przejściowego, ale dzięki temu zapewnia szybką i *naturalną* zbieżność zmiennej q_3 do sygnału referencyjnego q_{3t} . Zauważmy, że zmienne q_1 oraz

q_2 mają w interpretacji fizykalnej postać odpowiednio przyspieszenia i prędkości, podczas gdy q_3 jest sygnałem pozycji. W tym momencie interpretacja geometryczna wynikająca z metodologii VFO znajduje intuicyjne uzasadnienie także w interpretacji fizykalnej, w której to zmiana przyspieszenia, a w konsekwencji zmiana prędkości, winny w stanie przejściowym sprowadzać sygnał pozycyjny q_3 do sygnału referencyjnego q_{3t} i dopiero po znalezieniu się zmiennej q_3 w okolicy q_{3t} winny przechodzić w sposób ciągły w sygnały q_{1t} oraz q_{2t} . Z tego względu należy spodziewać się, że w otoczeniu punktu $e_3 = 0$, pomocnicze błędy orientacji e_{1a} i e_{2a} będą zbiegać do odpowiednich błędów odtwarzania e_1 i e_2 .

Przywołując analogiczne rozważania przeprowadzone dla systemów nieholonomicznych można powiedzieć, iż i w tym przypadku strategia sterowania metodą VFO *unik*a jednoczesnego sprowadzania wszystkich błędów e_i , $i = 1, 2, 3$ do zera w zamian za zbieżność niejako *sekwencyjną*, dając w zamian naturalną i nieoscylacyjną ewolucję zmiennej pozycji q_3 do wartości referencyjnej³¹. Ostatecznie możemy zapisać co następuje.

STEROWNIK 7 Na podstawie (3.248) oraz (3.262) sterownik VFO dla systemu (3.238) gwarantujący rozwiązanie zadania śledzenia i stabilizacji ma następującą postać:

$$u_1 \stackrel{\Delta}{=} k_1(q_{1a} - q_1) + \dot{q}_{1a} = \stackrel{(3.262)}{=} (k_1 + k_2 + k_3)\ddot{e}_3 + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)\dot{e}_3 + k_1k_2k_3e_3 + \ddot{q}_{3t}, \quad (3.265)$$

gdzie współczynniki $k_1, k_2, k_3 > 0$ stanowią parametry projektowe oraz

$$e_3 \stackrel{(3.257)}{=} q_{3t} - q_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_3 = \dot{q}_{3t} - \dot{q}_3 \quad \Rightarrow \quad \ddot{e}_3 = \ddot{q}_{3t} - \ddot{q}_3,$$

a sygnały referencyjne $\dot{q}_{3t}, \ddot{q}_{3t}$ oraz \ddot{q}_{3t} wynikają z (3.254)-(3.256).



Twierdzenie 3.9 Dane są sygnały referencyjne (3.251). Ciągłe prawo sterowania VFO (3.265) zastosowane do systemu (3.238) gwarantuje globalną jednostajną i wykładniczą zbieżność błędu śledzenia (3.257) w takim sensie, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e(\tau) = \mathbf{0}$$

dla dowolnego ograniczonego $e(0) \in \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^3$.

Dowód. Skupmy na początku uwagę na ewolucji pomocniczych błędów orientacji. Podstawiając do (3.238) ogólną postać sterowania orientującego u_1 z (3.248) uzyskujemy równanie:

$$\dot{e}_{1a} + k_1 e_{1a} = 0,$$

z którego wynika, że q_1 zmierza wykładniczo do pomocniczej zmiennej orientacji q_{1a} :

$$e_{1a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{1a}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} q_1(\tau) = q_{1a}(\tau) \stackrel{(3.245)}{=} h_2(\tau). \quad (3.266)$$

³¹Wniosek ten, na razie intuicyjny, zostanie formalnie rozpatrzony poniżej.

Następnie, przywołując drugie równanie modelu (3.238) możemy zapisać: $\ddot{q}_2 = \dot{q}_1 = u_1$. Korzystając ponownie z postaci ogólnej (3.248) sterowania u_1 mamy:

$$\ddot{q}_2 = k_1(q_{1a} - q_1) + \dot{q}_{1a} \stackrel{(3.245)}{=} k_1(h_2 - \dot{q}_2) + \dot{h}_2 \stackrel{(3.250)}{=} k_1(k_2 e_{2a} + \dot{e}_{2a}) + k_2 \dot{e}_{2a} + \ddot{q}_{2a},$$

co po uporządkowaniu daje:

$$\ddot{e}_{2a} + (k_1 + k_2)\dot{e}_{2a} + k_1 k_2 e_{2a} = 0. \quad (3.267)$$

Z powyższego równania wynika, że dla $k_{1,2} > 0$ zmienna q_2 zmierza wykładniczo i bez oscylacji³² do pomocniczej zmiennej orientacji q_{2a} :

$$e_{2a}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty \quad \wedge \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{2a}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} q_2(\tau) = q_{2a}(\tau) \stackrel{(3.245)}{=} h_3(\tau). \quad (3.268)$$

Przejdźmy teraz do kwestii ewolucji błędu e_3 . Z (3.257) wynika, że: $e_3 = q_{3t} - q_3 \Rightarrow \dot{e}_3 = \dot{q}_{3t} - \dot{q}_3$. Z ostatniego równania w modelu (3.238) mamy ponadto:

$$\dot{q}_3 = q_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{e}_3 = \dot{q}_{3t} - q_2 \stackrel{(3.259)}{=} h_3 - k_3 e_3 - q_2,$$

co po uporządkowaniu daje następujące równanie pomocnicze:

$$\dot{e}_3 + k_3 e_3 = r, \quad \text{gdzie} \quad r \triangleq h_3 - q_2 \stackrel{(3.245)}{=} q_{2a} - q_2 = e_{2a}. \quad (3.269)$$

Do powyższego równania wrócimy w dalszej części pracy. Teraz jednak wykorzystamy postać sterowania orientującego u_1 z (3.265). Zastosowanie (3.265) do systemu (3.238) pozwala na uzyskanie następującego równania różniczkowego:

$$\ddot{e}_3 + \kappa_1 \dot{e}_3 + \kappa_2 \dot{e}_3 + \kappa_3 e_3 = 0, \quad (3.270)$$

gdzie $\kappa_1 \triangleq k_1 + k_2 + k_3$, $\kappa_2 \triangleq k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3$ oraz $\kappa_3 \triangleq k_1 k_2 k_3$. Wykorzystanie (3.270) łącznie z przywołaniem następujących słusznych związków: $\dot{e}_3 = e_2$, $\dot{e}_2 = e_1$ oraz $\dot{e}_1 = \ddot{e}_3$ pozwala zapisać jednorodne równanie różniczkowe dla całego wektora błędu odtwarzania:

$$\dot{e}(\tau) = \mathbf{H} e(\tau), \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & -\kappa_2 & -\kappa_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.271)$$

gdzie dla $k_1, k_2, k_3 > 0$ wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{H} są rzeczywiste ujemne, co bezpośrednio wynika z równania charakterystycznego tej macierzy:

$$\lambda^3 + (k_1 + k_2 + k_3)\lambda^2 + (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3)\lambda + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby rzeczywiste: $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = -k_2$, $\lambda_3 = -k_3$. Wnioskujemy zatem, iż dla dowolnych dodatnich współczynników k_i , $i = 1, 2, 3$, błędy $e_i(\tau)$ zmierzają wykładniczo do zera. Z postaci równania (3.270) wynika także, iż zbieżność błędu e_3 (czyli błędu odtwarzania pozycji) będzie miała charakter nieoscylacyjny dla dowolnych $k_1, k_2, k_3 > 0$.

³²Równanie charakterystyczne dla (3.267) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne: $\lambda_{1,2} = -k_{1,2}$.

Można prosto pokazać (patrz Dodatek B.4), że w granicy zachodzą następujące relacje:

$$\lim_{e_{1a}, e_{2a}, e_3 \rightarrow 0} \begin{cases} h_1(e_{1a}, e_3) &= \dot{q}_{1t}(\tau), \\ h_2(e_{2a}, e_3) &= \dot{q}_{2t}(\tau), \\ h_3(e_3) &= \dot{q}_{3t}(\tau). \end{cases} \quad (3.272)$$

Zatem po nałożeniu orientacji pól $\dot{\mathbf{q}}^*$ oraz \mathbf{h}^* i dla q_3 znajdującego się w pobliżu sygnału referencyjnego q_{3t} , pole \mathbf{h} przechodzi w referencyjną prędkość stanu $\dot{\mathbf{q}}_t(\tau)$.

Z (3.270) wynika, że $e_3(\tau), \dot{e}_3(\tau), \ddot{e}_3(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Zatem z (3.265), (3.256) oraz z założenia (3.252) wynika, że $u_1(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$.

Przywołajmy teraz wyprowadzone wcześniej równanie (3.269). Z wniosku o wykładniczej zbieżności błędu e_3 do zera wynika, że element h_3 w (3.269) jest ograniczony (por.(3.259)). Przywołując teraz (3.268) możemy wnioskować, że $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0$. Jednocześnie zbieżność sygnału r do zera jest tym szybsza, im szybciej e_{2a} zmierza do zera. Natomiast z (3.267) wynika, iż zbieżność e_{2a} jest tym szybsza im większe są wartości współczynników k_1 oraz k_2 . Współczynniki te bezpośrednio odpowiadają za efektywność procesu nakładania orientacji pola $\dot{\mathbf{q}}^*$ na orientację pola \mathbf{h}^* . Zwiększanie efektywności procesu orientowania (poprzez zwiększanie współczynników k_1 oraz k_2) skutkuje pozornym obniżaniem rzędu dynamiki dla błędu e_3 , która w skrajnym, granicznym przypadku dla $k_1, k_2 \rightarrow \infty$ staje się dynamiką rzędu pierwszego zgodnie z równaniem (3.269), w którym przyjmiemy $e_{2a} = 0$. Analogiczny wynik dostaniemy dzieląc obie strony równania (3.270) przez iloczyn $k_1 k_2$ i przechodząc w wyrażenie graniczne dla $k_1, k_2 \rightarrow \infty$. Takie zachowanie się błędu e_3 jest zgodne z dotychczasowymi wnioskami uzyskanymi dla systemów nieholonomicznych, gdzie błąd \mathbf{e}^* też spełnia liniowe równanie rzędu pierwszego w granicy dla idealnego nałożenia pola \mathbf{g}_2^* na pole \mathbf{h}^* , czyli dla $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Zgodność taka może świadczyć o tym, iż pozorna redukcja rzędu dynamiki zmian błędu \mathbf{e} jest cechą charakterystyczną metody orientowania pól wektorowych.

Pełne odniesienie się do metody VFO wymaga jeszcze sprawdzenia czy w granicy dla $e_{1a}, e_{2a} \rightarrow 0$ orientacje pól $\dot{\mathbf{q}}^*$ oraz \mathbf{h}^* rzeczywiście zostaną uzgodnione. Zdefiniujmy kosinus kąta orientacji $\alpha \triangleq \angle(\dot{\mathbf{q}}^*, \mathbf{h}^*)$:

$$\cos \alpha \triangleq \frac{\dot{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{h}^*}{\|\dot{\mathbf{q}}^*\| \|\mathbf{h}^*\|} \stackrel{(3.239, 3.243)}{=} \frac{\dot{q}_2 h_2 + \dot{q}_3 h_3}{\sqrt{\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} \sqrt{h_2^2 + h_3^2}} \stackrel{(3.238)}{=} \frac{q_1 h_2 + q_2 h_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2} \sqrt{h_2^2 + h_3^2}}.$$

Łatwo sprawdzić poprzez bezpośrednie podstawienie, że dla $e_{1a}, e_{2a} \rightarrow 0$, czyli dla $q_1 \rightarrow h_2$ oraz $q_2 \rightarrow h_3$, kosinus zmierza do wartości +1, co świadczy o spełnieniu relacji (2.13). \square

Uwaga 3.18 Wszystkie rozważania i wnioski związane ze zbieżnością sygnałów $q_1 = x_3, q_2 = x_2$ oraz $q_3 = x_1$ pozostają w mocy dla systemu wyjściowego (3.235) po przejściu do oryginalnej kolejności zmiennych $x_1 = q_3, x_2 = q_2, x_3 = q_1$.

Zwróćmy na koniec uwagę na definicję (3.265) oraz postać pełnego sterowania (3.237) dla systemu oryginalnego (3.235). Sygnał v zdefiniowany w (3.237) stanowi klasyczną wewnętrzną pętlę odsprzęgającą (dla układów nieliniowych będzie to pętla linearyzująco-odsprzęgająca), a wyprowadzone w oparciu o metodę VFO sterowanie orientujące u_1

z (3.265) stanowi kombinację liniową sprzężenia zwrotnego oraz sprzężenia wyprzedzającego. Pełne sterowanie zatem, jest dobrze znanym z literatury robotycznej tzw. *prawem sterowania z dynamiką odwrotną*. Pojawia się konkluzja, iż zastosowanie metodologii VFO nie doprowadziło nas w tym przypadku do nowego algorytmu sterowania, czego wręcz trudno byłoby się spodziewać dla tak dobrze poznanych i zbadanych systemów liniowych. Warto jednak zwrócić uwagę przynajmniej na dwa istotne fakty, które uzasadniają próbę wykorzystania metody orientowania pól wektorowych do systemów liniowych.

Pierwszy z nich związany jest z kwestią zbadania ogólności metody VFO i z próbą unifikacji podejścia do zagadnień sterowania dla różnych klas systemów dynamicznych. Okazuje się, że metoda VFO może być stosowana zarówno do układów liniowych jak i nieliniowych, z dryfem i bezdryfowych dając w efekcie podobne własności układu zamkniętego (szczególnie jeśli chodzi o sposób zbieżności błędów regulacji). Systematyczna analiza modeli wspomnianych systemów z punktu widzenia metodologii VFO pozwala na zauważenie pewnych wspólnych cech tych systemów, które ułatwiają interpretację poszczególnych składników w wyprowadzonym prawie sterowania.

Drugi aspekt dotyczy parametrycznej syntezy układu sterowania. O tym problemie wspomniano już przy okazji analizy wcześniejszych przykładów, gdzie zauważono, iż synteza ta jest wyjątkowo prosta dla sterowników VFO, z przejrzystą interpretacją wpływu poszczególnych współczynników na jakość sterowania niezależnie od charakteru sygnałów referencyjnych i warunków początkowych. Wydawałoby się, że w przypadku systemu liniowego nie można już nic więcej osiągnąć w tym zakresie poza technikami znanymi z teorii układów liniowych. Jednak okazuje się, iż metoda VFO zapewnia dla układów liniowych zawsze nieoscylacyjny przebieg sygnału błędu pozycji, niezależnie od przyjętych wartości współczynników regulatora. Jest to cecha pożądana, która dodatkowo zwalnia projektanta z konieczności, często żmudnego, poszukiwania odpowiednich wartości współczynników projektowych sterownika. Efekt pozornej redukcji rzędu dynamiki sugeruje bardzo prosty algorytm doboru nastaw. Możemy go sformułować w postaci dwóch wskazówek:

- S1. wybierz trzy dodatnie współczynniki k_1, k_2 i k_3 równe trzem żądanym rzeczywistym wartościom własnym układu zamkniętego,
- S2. w zależności od żądania stopnia redukcji rzędu dynamiki dla błędu odtwarzania pozycji, wybierz odpowiednio duże wartości współczynników k_1 oraz k_2 tak, by wartości własne $\lambda_1 = -k_1$ i $\lambda_2 = -k_2$ stały się nieznaczące w stosunku do wartości $\lambda_3 = -k_3$.

Wydaje się, iż geometryczna interpretacja wynikająca z metody VFO pozwala ujrzeć w nieco innym świetle sposób ewolucji rozważanych systemów, także liniowych. Jednocześnie daje ona alternatywne (geometryczne) uzasadnienie dla dobrze znanych technik i sposobów projektowania sterowania, które dotychczas wynikały jedynie z czysto abstrakcyjnej formalnej analizy równań różniczkowych modeli sterowanych systemów.

3.4.3 Wyniki badań symulacyjnych

Charakterystyczne cechy wyprowadzonego sterownika VFO dla systemu Σ_{ADS} , przedstawiają wyniki przeprowadzonych symulacji numerycznych. Obliczenia wykonano dla zmiennego kroku całkowania metodą *ODE45* (*Dormand-Prince*) w horyzoncie czasowym

$\tau \in [0, T]$, $T = 5[s]$. Podczas symulacji, sygnały prędkości \dot{q}_2, \dot{q}_3 sterowanego systemu występujące (niejawnie) w definicjach (3.247) oraz (3.250) były obliczane zgodnie z równaniem (3.238).

Symulacje zrealizowano z wykorzystaniem sterownika (3.265) dla zadania śledzenia trajektorii zmiennej w czasie. Trajektorię referencyjną generowano na podstawie definicji (3.251). Wybrano następujące sterowania referencyjne i warunki początkowe:

$$u_{1t}(\tau) \triangleq \sin 0.5\tau, \quad \mathbf{q}_t(0) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(0) \triangleq \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

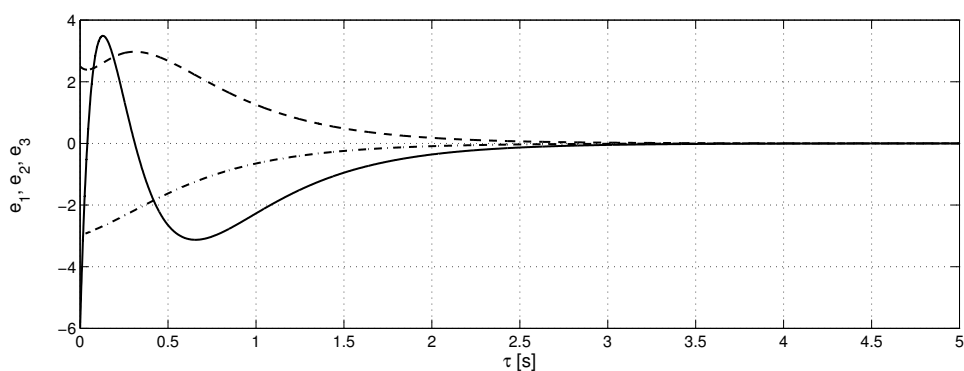
Zgodnie z podziałem trajektorii referencyjnych z rozdziału 2 i zgodnie z przyjętą interpretacją pola $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \cdot 1$, wybrana trajektoria referencyjna jest typu T3 (popychająco-orientująca). Podczas symulacji przyjęto następujące wartości współczynników: $k_1 = 10$, $k_2 = 5$ oraz $k_3 = 2$. Czasowe przebiegi najważniejszych sygnałów³³ przedstawiają rys. 3.95-3.99. Wynikowa ścieżka stanu sterowanego systemu w \mathbb{R}^3 oraz jej rzut w podprzestrzeń \mathbb{R}^2 pokazane zostały na rys. 3.100 oraz 3.101, gdzie zaznaczono również stan początkowy $\mathbf{q}(0)$.

Z rys. 3.95 widać, iż błąd e_3 zmierza do zera bez oscylacji. Rys. 3.97 wskazuje, że także błędy pomocnicze zmierzają wykładniczo do zera z tym, że rząd dynamiki błędu e_{2a} jest o jeden większy od rzędu dynamiki sygnału e_{1a} . Warto zwrócić uwagę także na dużą efektywność procesu orientowania wynikającą z przebiegu $\cos \alpha$ (rys. 3.96). Pozorna redukcja rzędu dynamiki błędu śledzenia e_3 (patrz równanie (3.270)) została przedstawiona na rys. 3.102, gdzie wykreślono przebieg tego sygnału jako wynik symulacji dla następujących wartości parametrów sterownika: $k_1 = 30$, $k_2 = 15$ oraz $k_3 = 2$.

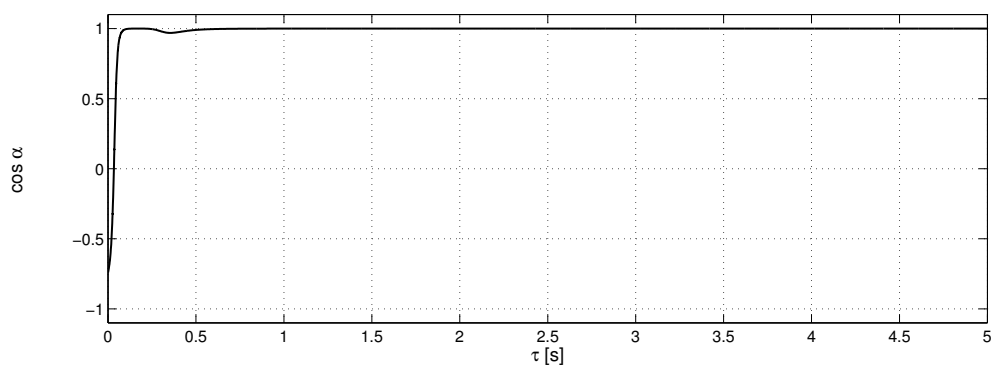
3.4.4 Podsumowanie

Powyższy punkt przedstawia wykorzystanie metody VFO do zadań sterowania dla afinicznego systemu liniowego z dryfem. Jest to przykład wykraczający nieco poza główny nurt prezentowanej pracy, gdyż dotyczy modelu, który nie należy do tytułowej podklasy systemów nieholonomicznych. Pokazuje on jednak, iż stosowalność metodologii orientowania pól wektorowych jest szersza niż wskazywałyby na to wcześniejsze rozważania i pozwala (przynajmniej w pewnym zakresie) na unifikację podejścia do projektowania, analizy i syntezy sterowania dla systemów dynamicznych, tak liniowych jak i nieliniowych, o różnych własnościach modelu. Zastosowanie metodologii VFO do systemu liniowego doprowadziło do dobrze znanego z literatury prawa sterowania z dynamiką odwrotną. W przeświadczeniu autora, poprzez wprowadzone interpretacje geometryczne, prawo to ukazane zostało w nowym świetle, a metoda VFO pozwoliła w tym przypadku maksymalnie uprościć proces syntezy wyprowadzonego sterownika. Przeanalizowany przykład stanowi pierwszą próbę rozszerzenia stosowalności metodologii orientowania pól wektorowych na układy spoza rodziny systemów bezdryfowych. Wymagane są dalsze prace w tym kierunku. Zostaną one podjęte w niedalekiej przyszłości.

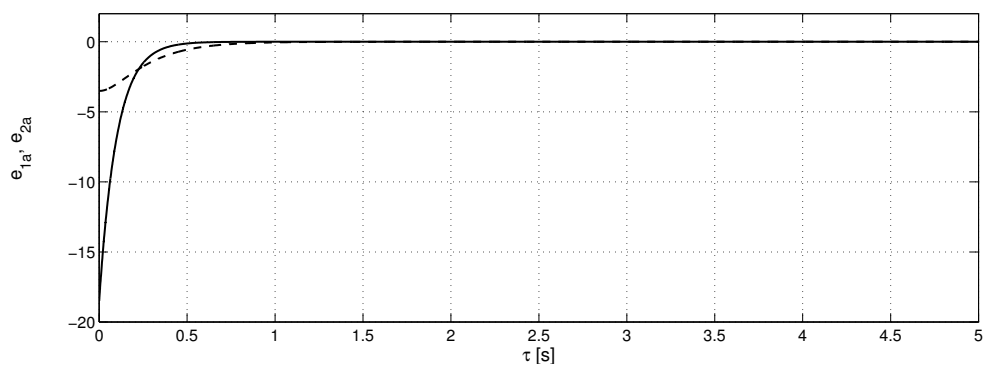
³³Na rysunkach nie oznaczono jednostek sygnałów, aby zachować ogólność rozważań.



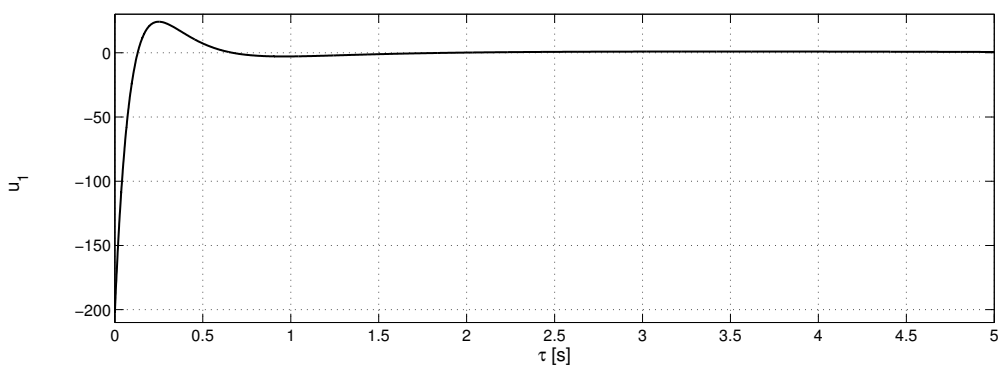
Rys. 3.95: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – błędy śledzenia: e_1 (-), e_2 (- -), e_3 (-.-).



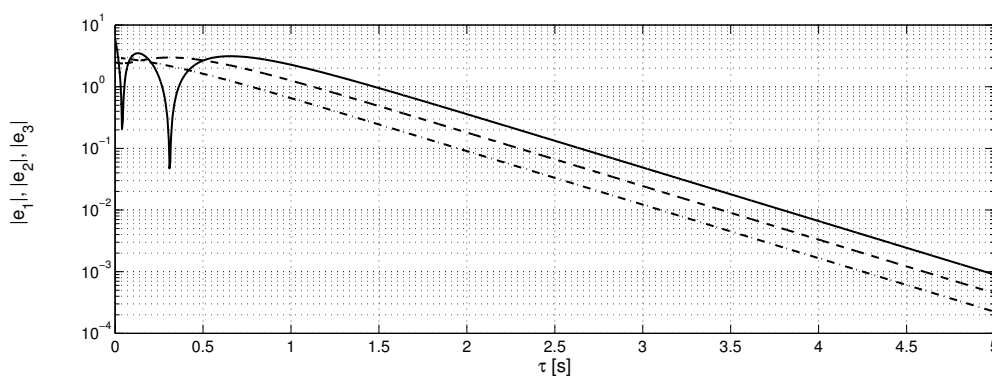
Rys. 3.96: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – efektywność orientowania pola \dot{q}^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(\dot{q}^*, \dot{h}^*)$.



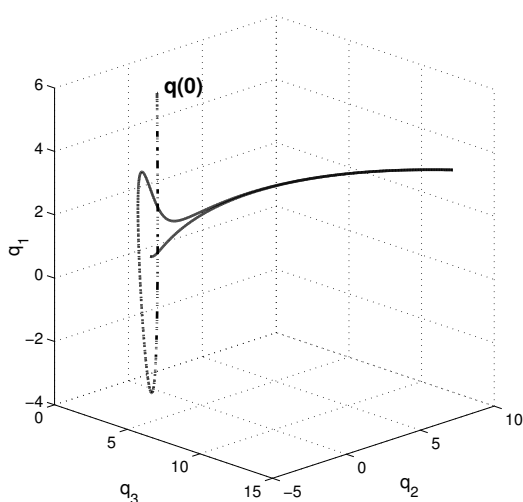
Rys. 3.97: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – pomocnicze błędy orientacji: e_{1a} (-) oraz e_{2a} (- -).



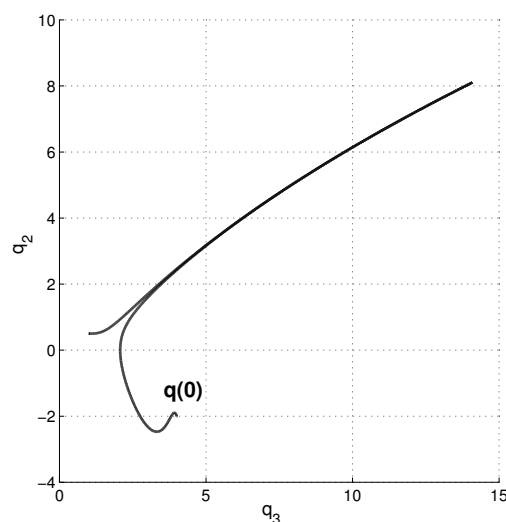
Rys. 3.98: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – sygnał sterujący u_1 .



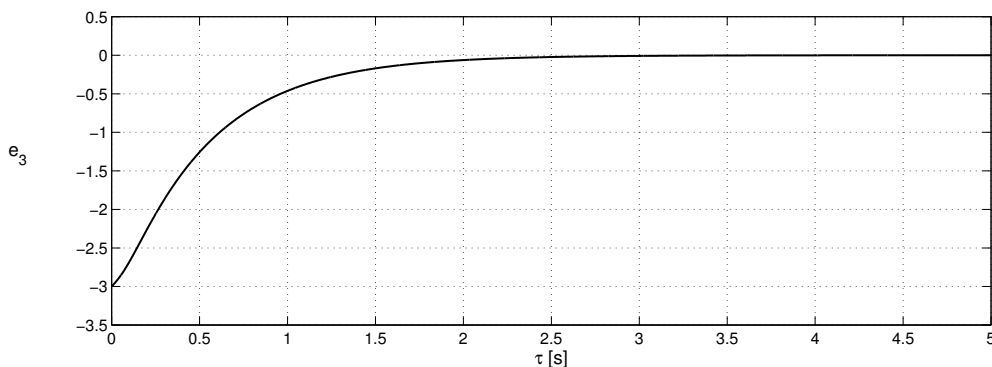
Rys. 3.99: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_1|$ (—), $|e_2|$ (- -), $|e_3|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



Rys. 3.100: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego oraz ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni \mathbb{R}^3 (zaznaczono początkowy stan systemu $q(0)$).



Rys. 3.101: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – ścieżka kreślona przez stan systemu sterowanego oraz ścieżka referencyjna (linia ciągła) w przestrzeni \mathbb{R}^2 (zaznaczono początkowy stan systemu $q(0)$).



Rys. 3.102: Σ_{ADS} : trajektoria T3 – przykład pozornej redukcji rzędu dynamiki błędu śledzenia e_3 (dla parametrów sterownika: $k_1 = 30$, $k_2 = 15$, $k_3 = 2$).

3.5 Uogólnienia i komentarze

W bieżącym rozdziale przedstawione zostały cztery przykłady wykorzystania metody orientowania pól wektorowych do realizacji zadań śledzenia i stabilizacji dla systemów o trójwymiarowym wektorze stanu. Pierwsze trzy analizowane modele należały do tytułowej podklasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych. Czwarty przykład stanowił próbę rozszerzenia stosowalności metodologii VFO na systemy spoza rodziny Σ .

W oparciu o przytoczone przykłady, można zauważyć pewne cechy ogólne strategii VFO oraz schemat postępowania wynikający z zastosowania metodologii VFO. Poniżej przedstawimy podstawowe wnioski nasuwające się po przeanalizowaniu wspomnianych przykładów oraz podkreślimy najbardziej istotne cechy sterowników VFO.

W pierwszej kolejności zauważmy, że proces projektowania prawa sterowania VFO dla systemów z rodziny Σ można podzielić na kilka podstawowych etapów, wspólnych dla każdego systemu:

- E1. analiza modelu i określenie podprzestrzeni konfiguracyjnej $Q' \subset \mathbb{R}^n$ pozwalającej na zastosowanie metody (sprawdzenie warunków koniecznych W1-W4),
- E2. wyprowadzenie warunków orientowania w oparciu o relację (2.11) lub (2.13),
- E3. wprowadzenie pomocniczej zmiennej orientacji q_a i pomocniczego błędu orientacji $e_a \triangleq q_a - q$ na podstawie wyprowadzonych warunków orientowania³⁴,
- E4. konstrukcja pola wektorowego zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$,
- E5. zdefiniowanie sterowania orientującego u_1 i popychającego u_2 zgodnie z następującymi równaniami (porównaj propozycje 3.1, 3.3, 3.5 oraz 3.8):

$$\mathbf{u}_{VFO} : \begin{cases} u_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t) \triangleq k_1 e_a(\tau) + \dot{q}_a(\tau), & k_1 > 0 \\ u_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t) \triangleq k_2(\mathbf{q}) \|\mathbf{h}^*(\tau)\| \cos \alpha, \end{cases}$$

których szczegółowa postać zależy od modelu rozważanego systemu.

Możliwość wyodrębnienia powyższych etapów, a także istnienie wspólnej i intuicyjnej interpretacji geometrycznej dla proponowanego sterowania mogą świadczyć (przynajmniej w pewnym zakresie) o spójności i ogólności strategii VFO. Wydaje się także, iż uzasadniają one określenie *metodologia* w odniesieniu do prezentowanej koncepcji.

Kolejna kwestia dotyczy wprowadzenia i definiowania pola zbieżności $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, a w konsekwencji sposobu zbieżności poszczególnych błędów regulacji występujących w układzie.

We wszystkich analizowanych przykładach zaproponowano wspólny sposób projektowania pola $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, które składało się z liniowej kombinacji ważonych błędów regulacji

³⁴Dla systemów, dla których $\dim(\mathbf{q}) > 3$ oraz dla przytoczonego przykładu systemu liniowego z dryfem, etap 3 wymaga zwykle wprowadzenia kilku pomocniczych zmiennych orientacji i tym samym kilku pomocniczych błędów orientacji.

bądź ważonych pomocniczych błędów orientacji oraz ze składników sprzężenia w przód, przy czym dla $i = 1, \dots, n$:

$$h_i \triangleq \begin{cases} k_i(q_{it} - q_i) + v_{it}, & \text{jeżeli } q_i \not\Rightarrow q_{ia} \\ k_i(q_{ia} - q_i) + \dot{q}_{ia}, & \text{jeżeli } q_i \Rightarrow q_{ia} \end{cases},$$

gdzie

$$v_{it} \triangleq \begin{cases} \dot{q}_{it} & \text{dla zadania śledzenia,} \\ \dot{q}_{ivt} & \text{dla zadania stabilizacji,} \end{cases}$$

a wyrażeniem $q_i \Rightarrow q_{ia}$ oznaczono fakt, iż zmiennej stanu q_i odpowiada wprowadzona zmienna pomocnicza orientacji q_{ia} wynikająca z realizacji etapu E3³⁵. Taka konstrukcja pola \mathbf{h} determinuje specyficzne zachowanie się błędów regulacji w stanach przejściowych, a tym samym charakterystyczną ewolucję całego systemu podczas dochodzenia do stanu referencyjnego. Zauważmy mianowicie, iż dla wszystkich przytoczonych przykładów systemów nieholonomicznych zbieżność błędów e_{1a}, \mathbf{e}^* oraz e_1 ma charakter w pewnym sensie *sekwencyjny*. *Sekwencyjność* ta polega na występowaniu zależności zbieżności jednych błędów od zbieżności drugich i znajduje potwierdzenie w przyjętej metodyce dowodowej. Cechą charakterystyczną jest tutaj kluczowa rola zmiennej orientującej (zmiennych orientujących), która początkowo pomaga pozostałym zmiennym stanu osiągnąć otoczenie ich wartości referencyjnych w $n - 1$ -wymiarowej przestrzeni stanu, a dopiero potem w sposób ciągły zbiega do wartości referencyjnej. Zatem składowa h_i odpowiadająca zmiennej orientującej q_i wskazuje kierunek zbieżności do pomocniczej zmiennej orientacji q_{ia} , a nie jak w przypadku pozostałych zmiennych, do wartości referencyjnej q_{it} . Ważnym jest zatem, aby zagwarantować zbieżność q_{ia} do sygnału referencyjnego q_{it} dopiero w granicy, gdy pozostałe zmienne stanu osiągają swoje wartości referencyjne. Odpowiedzialność za spełnienie tego wymagania spoczywa na projektancie pola zbieżności \mathbf{h} . Taka strategia sterowania zapewnia naturalny, nieoscylacyjny ruch systemu w etapie przejściowym i w przypadku robotów mobilnych odpowiada codziennym doświadczeniom kierowców nieholonomicznych pojazdów kołowych.

Sposób konstruowania pola zbieżności \mathbf{h} przedstawiony w tej rozprawie nie jest jedynym możliwym sposobem, a stanowi jedynie propozycję pozwalającą na odpowiednie kształtowanie procesów przejściowych sterowanego systemu. Ciekawym problemem badawczym wydaje się zatem konstrukcja innych, alternatywnych postaci tego pola i analiza wpływu tych postaci na ewolucję systemu, a także na położenie punktów nieciągłości sterowania w przestrzeni błędów regulacji.

Interpretacja geometryczna odpowiadająca metodzie VFO oraz uzyskane własności praw sterowania VFO nasuwają przypuszczenie, iż strategia ta może stanowić uogólnienie koncepcji sterowania we współrzędnych biegunowych stosowanej dotychczas głównie do modelu robota jednokołowego dla zadania stabilizacji³⁶ (patrz np. [ACBB95, Ast96, MCS99, Chw04]). W interpretacji metody VFO, poprzez zmianę wartości zmiennej orientującej sterownik niejako nakierowuje sterowany system w $n - 1$ -wymiarowej podprzestrzeni

³⁵Przypomnijmy, że nie dla każdej zmiennej orientującej wprowadza się zmienną pomocniczą. Przykładem jest model manipulatora NHM3, w którym zmienna stanu θ_2 jest zmienną orientującą, dla której jednak nie wprowadza się żadnej zmiennej pomocniczej w procesie projektowania sterowania VFO.

³⁶Potrzebę takiego uogólnienia sygnalizowano w pracach [KM95, OLV02].

stanu³⁷ na cel zdefiniowany wektorem referencyjnym $\mathbf{q}_t^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ i jednocześnie popycha podsystem $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}^*$ wzdłuż tak osiągniętego kierunku. Jest to schemat odpowiadający dobrze znanemu z życia codziennego i intuicyjnemu sposobowi jazdy rowerem, samochodem czy innym pojazdem kołowym w sytuacji gdy znajduje się on z dala od pożądanego trajektorii jazdy lub miejsca parkowania. Tutaj schemat ten został uogólniony i zastosowany także do innych systemów, których model różniczkowy wykazuje stosowne własności w świetle przyjętej interpretacji.

Zastosowanie we wszystkich zamieszczonych przykładach wspólnej strategii sterowania zarówno dla problemu śledzenia jak i stabilizacji w punkcie³⁸ nasuwa kolejny kierunek dalszych badań zmierzających do zaprojektowania uniwersalnego prawa sterowania pozwalającego na rozwiązanie obu problemów za pomocą jednej uniwersalnej struktury sterownika.

Na uwagę zasługuje, istotna z praktycznego punktu widzenia, cecha polegająca na bardzo prostej syntezie parametrycznej wszystkich wyprowadzonych sterowników VFO. Dobór wartości współczynników projektowych proponowanych sterowników (k_1 oraz k_p) gwarantujący zadowalającą jakość dynamiczną sterowania nie zależy od warunków początkowych systemu ani od rodzaju sygnałów referencyjnych. Świadczyć może o tym choćby fakt, iż dla zdecydowanej większości prób symulacyjnych wszystkich testowanych systemów przyjęto jednakowe wartości poszczególnych parametrów projektowych i uzyskano przebiegi sygnałów o podobnej jakości dynamicznej. Można wnioskować zatem, iż charakter uzyskiwanych procesów przejściowych jest cechą proponowanej strategii oraz metodologii projektowej VFO i wynika przede wszystkim ze struktury proponowanych praw sterowania, a nie z wartości poszczególnych współczynników projektowych.

Zastosowanie koncepcji orientowania pól wektorowych prowadzi generalnie do nieciągłych (odcinkami ciągłych) praw sterowania. W przypadku zadania odtwarzania stałego punktu referencyjnego strategia VFO pozwala na uzyskanie dwóch rodzajów sterowników:

- ciągłego w czasie i nieciągłego w dziedzinie błędu asymptotycznego *prawie stabilizatora*³⁹ niezdefiniowanego w punkcie stabilizacji (punkt stabilizacji nie jest punktem równowagi układu zamkniętego) oraz,
- nieciągłego (odcinkami ciągłego) asymptotycznego lub praktycznego stabilizatora dobrze określonego w każdym punkcie przestrzeni błędu.

Wydaje się, iż wspomniana nieciągłość rozważanych praw sterowania VFO jest ich cechą charakterystyczną i nie może zostać wyeliminowana ze względu na konieczność zachowania warunków stabilizowalności z twierdzenia Brocketta [Bro83]. Nieciągłość ta nie sprawia żadnych poważnych kłopotów numerycznych, co potwierdzają uzyskane wyniki symulacyjne. Jednym z potencjalnych praktycznych problemów w tej kwestii może być jednak brak własności odporności na zakłócenia pomiarowe stanu w okolicy punktu stabilizacji.

³⁷Dotyczy systemów, dla których wprowadzono tylko jedną pomocniczą zmienną orientacji.

³⁸Różnice wynikają jedynie z zastąpienia prędkości referencyjnej prędkością wirtualną oraz z innej definicji znaku funkcji $k(\cdot)$.

³⁹Zgodnie z terminologią wprowadzoną przez Astolfiego [Ast96].

Brak odporności wykazano w pracach [Ast96, KT02, S093] analizując wybrane *prawie* stabilizatory zastosowane do robota jednokołowego⁴⁰. Zagadnienie odporności sterowników VFO z punktu widzenia różnych rodzajów zakłóceń oraz niepewności parametrycznej i strukturalnej modelu nie zostało jeszcze zbadane i pozostaje nadal problemem otwartym.

Jak już wcześniej wspomniano, wykorzystanie metody VFO zaprezentowano tutaj tylko dla modeli trójwymiarowych. Skupienie uwagi na systemach trójwymiarowych wynika z chęci wskazania daleko idących analogii projektowych, uwypuklonych podczas analizy systemów o tej samej wymiarowości oraz z ograniczeń związanych z objętością prezentowanej pracy. Metoda VFO znajduje jednakże zastosowanie również do układów z większą wymiarowością wektora stanu. Przykład może stanowić praca [MK05e], w której zaproponowano rozwiązanie zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie dla modelu robota trójkołowego z napędem na tylną oś (czterowymiarowy wektor stanu). Poczyniono również pierwsze próby realizacji zadania stabilizacji dla tego systemu. Uzyskano pozytywne wyniki symulacyjne, jednak problem wymaga dalszej analizy teoretycznej. Wstępne próby zrealizowano także dla czterowymiarowego systemu łańcuchowego oraz manipulatora nieholonomicznego z czterema ogniwami. Szczegółowa analiza wspomnianych przykładów, tak teoretyczna jak i symulacyjna, wymaga jednak dalszych badań.

⁴⁰Należy również odwołać się do raportu [LMS98], w którym podano formalny dowód na brak odporności stabilizatorów homogenicznych na szumy pomiarowe w otoczeniu punktu stabilizacji.

Metoda VFO w świetle istniejących rozwiązań

Celem tego rozdziału będzie odniesienie zaprezentowanej metodologii sterowania VFO do bieżącego stanu wiedzy z zakresu algorytmów sterowania układami nieholonomicznymi i próba porównania jej z istniejącymi rozwiązaniami.

4.1 Klasyfikacja metody

Bez wątplenia, sterowniki VFO należy zaliczyć do grupy algorytmów nieciągłych ze sprzężeniem od stanu i niezależnych w sposób jawny od czasu. Wnioski wynikające z przykładów przytoczonych w poprzednim rozdziale pozwalają na następującą klasyfikację szczegółową.

- Sterowniki VFO dedykowane do zadań śledzenia trajektorii zmiennych w czasie wymagają dodatkowych definicji sygnałów sterujących w założonym otoczeniu punktów nieciągłości w dziedzinie błędu śledzenia. W efekcie otrzymuje się sterowniki, które w ogólności wykazują nieciągłość zarówno w dziedzinie błędu jak i w dziedzinie czasu.
- W przypadku wyprowadzonych sterowników VFO dla zadania stabilizacji, rozważa się tzw. *asymptotyczne prawie stabilizatory* nie gwarantujące stabilizacji układu zamkniętego w sensie Lapunowa, lecz zapewniające asymptotyczną zbieżność błędów stabilizacji do zera przy zapewnieniu odpowiednich warunków początkowych (patrz definicje 1.3 oraz 1.4). Są to stabilizatory nieciągłe w dziedzinie błędu stabilizacji i niezdefiniowane jedynie w punkcie stabilizacji. Pomimo nieciągłości w dziedzinie błędu, sterowniki takie wykazują własność ciągłości w dziedzinie czasu – po spełnieniu odpowiednich warunków, punkt nieciągłości nie jest osiągalny w skończonym czasie.
- Poprzez dodatkowe definicje sygnałów sterujących w punktach nieciągłości (lub ich otoczeniu) z *asymptotycznych prawie stabilizatorów* uzyskuje się nieciągłe asymptotyczne (lub praktyczne) stabilizatory rozumiane w sensie Lapunowa i dobrze określone

w całej dziedzinie błędu stabilizacji. W przypadku stabilizatorów praktycznych nieciągłość występuje zawsze zarówno w dziedzinie błędu stabilizacji jak i w dziedzinie czasu, gdyż punkt nieciągłości jest osiągnięty w czasie skończonym.

Rodzinę sterowników nieciągłych, zdefiniowanych oddzielnie w punktach nieciągłości (lub ich otoczeniu) oraz poza nimi określa się w literaturze także mianem algorytmów odcinkami ciągłych, bądź algorytmów ciągłych w sensie C^0 .

Należy podkreślić, iż nieciągłości w metodzie VFO mają odmienny charakter od nieciągłości charakterystycznych dla proponowanych w literaturze sterowników ślizgowych, gdyż nie prowadzą do niepożądanych drgań sterowania (trajektorie systemu nie utykają w punktach nieciągłości [KM95]). W przypadku zadania śledzenia, sterowniki VFO mogą potencjalnie przechodzić przez punkty nieciągłości tylko w stanach przejściowych, a asymptotyczne *prawie stabilizatory* VFO zmagają się do tych punktów jedynie asymptotycznie¹. Dodatkowo wyniki symulacyjne pokazały, iż dla niektórych systemów prawdopodobieństwo osiągnięcia punktów nieciągłości w trakcie realizacji zadania śledzenia jest niezwykle rzadkie.

Przytaczając pracę [LA98] można wymienić kilka podstawowych zalet i wad charakteryzujących metody nieciągłe, a zgodnie z powyższą klasyfikacją także metodę VFO. Do zalet należy zaliczyć:

- szybką zbieżność błędów regulacji,
- nieoscylacyjny charakter przebiegów przejściowych,
- relatywnie niski koszt energetyczny sterowania,
- *naturalną* ewolucję systemu w stanach przejściowych z minimalną liczbą *nawrotów*².

Podstawowe wady to:

- występowanie punktów nieciągłości w dziedzinie błędu regulacji lub w przestrzeni stanu, w których oryginalny sterownik nie jest zdefiniowany,
- niemożność zapewnienia stabilności w sensie Lapunowa dla układu zamkniętego przy braku definicji sterownika w punktach nieciągłości,
- problemy z odpornością na szumy pomiarowe w okolicy punktów nieciągłości.

Warto zauważyć, iż podstawowe zalety metod nieciągłych związane są głównie z praktyczną stroną problemów sterowania, natomiast wady przede wszystkim ze stroną teoretyczną (poza kwestią odporności). Odwrotna sytuacja natomiast ma miejsce w przypadku ciągłych technik jawnie zależnych od czasu, które jak dotąd cechują się dobrymi podstawami matematycznymi lecz niezadowolającymi lub wręcz nieakceptowalnymi w praktyce osiągnięciami (zbyt wolna zbieżność, znaczne oscylacje przebiegów, duży koszt energetyczny sterowań). Skuteczną alternatywą być może okazać się, obecnie intensywnie rozwijane,

¹Przy spełnieniu warunków zbieżności wykładniczej dla błędu e^* – patrz dowody zbieżności oraz uwagi z rozdziału poprzedniego.

²Przez pojęcie *nawrotu* należy rozumieć występowanie nieładkich wierzchołków w przebiegu trajektorii stanu $\mathbf{q}^*(\tau) \in \mathbb{R}^{n-1}$ (pojęcie użyte poprzez analogię do ruchu pojazdów kołowych na płaszczyźnie).

praktyczne ciągle stabilizatory zaproponowane przez Dixona et al. [DDZB01] czy Morina et al. [MS03] (patrz również [KP04, PK05, KMP05]).

Poza ogólnymi cechami wymienionymi powyżej a wynikającymi z nieciągłego charakteru metody, sterowniki VFO oraz sama metodologia VFO wykazują dodatkowo kilka istotnych – tak z praktycznego jak i z teoretycznego punktu widzenia – cech, które zgodnie z przekonaniem autora wyróżniają je wśród już istniejących rozwiązań. Cechy te zostaną wskazane i omówione w dalszej części rozdziału.

4.2 Analiza porównacza

Wymienione w poprzednim podrozdziale charakterystyki poszczególnych metod sterowania wynikają z wniosków wyprowadzonych w oparciu o przeprowadzone i zamieszczone w literaturze badania teoretyczne, symulacyjne i eksperymentalne oraz porównawcze szeregu dostępnych algorytmów sterowania dedykowanych dla układów nieholonomicznych. Przykładami takich badań mogą być prace Astolfiego [Ast96], Sørdalena [Sø93] a także Oriolo et al. [OLV02] oraz Kima i Tsiotrasi³ [KT02]. Dwie ostatnie zawierają pewne wyniki porównawcze, w których wzięto pod uwagę zarówno techniki ciągle jak i nieciągle, a porównania dokonano w oparciu o kilka wybranych kryteriów, przeważnie o charakterze jakościowym. Ograniczeniem ogólności wniosków uzyskanych na podstawie przytoczonych prac jest fakt, iż badania porównawcze przeprowadzone zostały jedynie dla jednego modelu systemu, a mianowicie dla robota jednokołowego (dwukołowego).

Aby ocena metody VFO w świetle aktualnego stanu wiedzy miała jak najbardziej obiektywny charakter, należy dobrze określić zakres oraz kryteria przeprowadzanego porównania.

Ogólnie, porównanie może mieć charakter dwójaki: jakościowy bądź ilościowy. Analiza ilościowa wymaga zdefiniowania konkretnych numerycznych wskaźników jakości, zwykle związanych z przebiegiem błędów regulacji, czasem ustalania oraz kosztem sterowania i polega na porównaniu wartości tych wskaźników dla różnych metod sterowania i przyjętych wartości współczynników projektowych sterownika. Jest to metoda znana i stosowana w problemach liniowej teorii sterowania. W przekonaniu autora jednak, zastosowanie takiego podejścia do analizy porównawczej w przypadku nieliniowych praw sterowania o często zupełnie odmiennych strukturach, różnej ilości parametrów projektowych, a także zasadniczo różnym wpływie poszczególnych parametrów na jakość dynamiczną i statyczną procesu sterowania, nie daje zwykle miarodajnych wyników. Wnioski wyciągane z takiej analizy mogą być zbyt daleko posunięte czy wręcz nieprawdziwe w przypadku ogólnym. Bardzo często bowiem optymalny zestaw współczynników dla danego sterownika jest funkcją warunków początkowych sterowanego systemu oraz charakteru sygnałów referencyjnych. Trudno zatem w takich przypadkach uzyskać globalne ekstremum (jeśli ono w ogóle istnieje) związane z minimalizacją kosztu sterowania przy jednocześnie najkrótszym czasie regulacji i małej oscylacyjności przebiegów przejściowych dla dowolnych zadań sterowania. Bez miarodajnej bazy, porównania takie często mogą być nie tylko bezwartościowe, ale i

³Pomocne mogą być także prace przeglądowe [dWKSS93, KM95, MS04] oraz książka [Blo03].

szkodliwe⁴. Wydaje się zatem, iż kwestia znalezienia obiektywnych i miarodajnych metod porównawczych (szczególnie o charakterze ilościowym) dla nieliniowych praw sterowania stanowi sama w sobie aktualny, trudny i jak dotąd nierozwiązany problem.

Z tych względów analiza metody VFO zostanie ograniczona do oceny jakościowej z podkreśleniem cech związanych z jej praktycznym wykorzystaniem. Nie będziemy jednocześnie odnosić metodologii VFO do jakiegokolwiek algorytmu z grupy sterowań ciągłych, gdyż uzyskane wnioski musiałyby być powtórzeniem wymienionych wcześniej charakterystyk algorytmów nieciągłych. Wydaje się, iż porównanie powinno dotyczyć jedynie technik wykorzystujących sprzężenie zwrotne od stanu i wykazujące podobny stopień ogólności czy też zakres stosowalności metody. W konsekwencji, ograniczymy nasze rozważania do rodziny nieciągłych lub odcinkami ciągłych sterowników dedykowanych do zadań śledzenia trajektorii lub stabilizacji w punkcie i stosowalnych do wybranej klasy systemów nieholonomicznych.

Algorytmy zaproponowane przez Sørdalena i Tsiotrasa mają ograniczone zastosowanie i były proponowane dla wybranych modeli – robota dwukołowego, systemu łańcuchowego czy statku powietrznego. Porównanie z metodą VFO miałyby w tych przypadkach sens jedynie wtedy, gdybyśmy rozważali problem sterowania tymi konkretnymi systemami. Zgodnie jednak z przyjętą wyżej koncepcją, interesuje nas całościowe i bardziej ogólne porównanie biorące pod uwagę całą klasę systemów dynamicznych.

Do analizy porównawczej wybierzemy zatem dwie następujące metody:

- 1) metodę z σ -procesem zaproponowaną przez Astolfiego w pracy [Ast96], której stosowalność jest bardzo szeroka (w skrócie metodę tę oznaczymy jako σM),
- 2) koncepcję *rozszerzonej metody Lapunowa* zaproponowanej przez Urakubo et al. między innymi w [TUT02, Ura05] i znajdującej zastosowanie do tzw. systemów pierwszego rzędu⁵ (w skrócie metodę tę oznaczymy jako ELM).

Metoda pierwsza (wprowadzona przez Astolfiego) polega na znalezieniu i zastosowaniu tzw. σ -procesu, czyli pewnego nieciągłego odwzorowania, które pozwala na transformację oryginalnego ciągłego modelu systemu do modelu nieciągłego w nowej przestrzeni stanu. Kolejnym krokiem w tym podejściu jest zaprojektowanie ciągłego stabilizatora (jeśli taki istnieje) gwarantującego asymptotyczną stabilność dla modelu transformowanego. Ostatni etap polega na zastosowaniu do tak zaprojektowanego stabilizatora transformacji odwrotnej zwanej *odwrotnym σ -procesem* tak, aby uzyskać stabilizator nieciągły zapewniający w efekcie asymptotyczną *prawie stabilizację* oryginalnego (ciągłego) modelu rozważanego systemu nieholonomicznego.

Druga metoda sterowania polega na rozszerzeniu koncepcji projektowania sterowania w oparciu o funkcję Lapunowa, w której nieciągły sygnał sterujący konstruowany jest jako gradient odpowiedniej funkcji Lapunowa mnożony przez sumę dwóch składników: pierwszego – związanego z ujemnie określoną macierzą symetryczną i drugiego – skojarzonego z odpowiednio utworzoną macierzą skośniasymetryczną. Oba składniki odgrywają

⁴Mogą utwierdzać nieprawdziwe przekonania w środowisku badaczy.

⁵Czyli systemów, dla których pola-generatory wraz z pierwszym poziomem nawiasów Liego tych pól rozpinają całą przestrzeń styczną przestrzeni stanu tych systemów [Ura05].

ściśle określoną rolę w całym procesie sterownia, powodując odpowiednio przyciąganie lub destabilizację pewnego zbioru punktów równowagi układu zamkniętego czyniąc punkt referencyjny jedynym stabilnym atraktorem w przestrzeni stanu.

Analiza porównawcza strategii VFO z obiema wyżej wspomnianymi koncepcjami sterowania przeprowadzona będzie w oparciu o następujące wybrane kryteria:

- K1:** zakres stosowalności metody – klasa systemów,
- K2:** zakres stosowalności metody – rodzaje zadań sterowania,
- K3:** prostota i systematyczność metodologii projektowej,
- K4:** jakość dynamiczna sterowania oraz szacunkowy koszt sterowania,
- K5:** możliwość intuicyjnej interpretacji poszczególnych składników sterowania,
- K6:** prostota syntezy parametrycznej sterownika,
- K7:** prostota implementacji i złożoność obliczeniowa.

Ad K1. Zgodnie z [Ast96], metoda σ M dedykowana jest do bezdryfowych systemów nieliniowych o n -wymiarowym wektorze stanu i $(n - p)$ -wymiarowym wektorze sterowań, gdzie $0 < p < n$. Pomimo, iż rozważana klasa systemów jest bardzo szeroka, to stosowalność metody wymaga dodatkowo znalezienia dla danego modelu nieciągłej transformacji zmiennych stanu (tzw. σ -procesu) i ciągłego stabilizatora dla systemu transformowanego. Na dzień dzisiejszy nie istnieje systematyczna metoda określania takiej transformacji, jakkolwiek strategię σ M zastosowano już do wielu systemów, takich jak robot jednokołowy i trójkołowy, systemy łańcuchowe, łódź podwodna czy robot skaczący.

Strategia ELM dotyczy tzw. bezdryfowych nieholonomicznych systemów pierwszego rzędu [Ura05]. Są to systemy, dla których podstawowe pola wektorowe wraz z nawiasami Liego tych pól z pierwszego poziomu rozpinają całą przestrzeń styczną przestrzeni stanu. Taka klasa systemów dopuszcza przy m -wymiarowym wektorze sygnałów sterujących nie więcej niż $(m(m + 1)/2)$ -wymiarowy wektor zmiennych stanu. Zgodnie z wiedzą autora, metoda ELM znalazła dotychczas zastosowanie do takich systemów, jak robot jednokołowy oraz swobodnie latający statek powietrzny.

Stosowalność metody VFO dotyczy bezdryfowych systemów nieholonomicznych o specjalnej strukturze modelu (dwa pola podstawowe i dwa sterowania: $m = 2$) przedstawionej i omówionej w rozdziale 2. Pokazano, iż ma ona także zastosowanie do innych struktur, w których występuje pole dryfowe i nie ma niecałkowalnych ograniczeń prędkościowych. Zatem problem precyzyjnego określenia klasy modeli, do których można stosować technikę VFO wymaga dalszych badań. W tej pracy rozważania zawężono do modeli trójwymiarowych ($n = 3$), lecz nie wynika to z ograniczeń strategii VFO, albowiem można ją stosować również do systemów czterowymiarowych. Systemy o dwóch sterowaniach ($m = 2$) i wymiarowości większej niż cztery ($n > 4$) nie były jak dotąd rozważane. Jakkolwiek wydaje się, iż z formalnego punktu widzenia nie ma przeszkód do wykorzystania

metody w takich przypadkach⁶. Należy jednak podkreślić, iż dla $n > 3$, $m = 2$ i przyjętej tutaj postaci pola zbieżności \mathbf{h} , zastosowanie metody VFO będzie wymagać sprzężenia zwrotnego od coraz to wyższych pochodnych zmiennych stanu, co może stanowić trudność w praktycznej implementacji. Jak dotąd, strategia VFO znalazła zastosowanie do takich systemów, jak robot jednokołowy ($n = 3, m = 2$), robot trójkołowy ($n = 4, m = 2$ – tylko dla zadania śledzenia), system łańcuchowy 3-D ($n = 3, m = 2$), manipulator z przekładnikami nieholonomicznymi i trzema ogniwami ($n = 3, m = 2$) oraz liniowy system afiniczny z dryfem ($n = 3, m = 1 + \text{dryf}$).

Ad K2. Zgodnie z wiedzą autora, obie alternatywne strategie, σ M oraz ELM, nie zostały jak dotąd zastosowane do rozwiązania zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie, a jedynie do problemów stabilizacji w punkcie (lub jego otoczeniu). Oba podejścia pozwalają na uzyskanie asymptotycznych stabilizatorów (lub prawie stabilizatorów). W przypadku metody σ M zaproponowano także wersje sterowników gwarantujących stabilizację praktyczną. Wspomniane metody koncentrują się na stabilizacji punktu zerowego w przestrzeni stanu, zatem stabilizacja w punkcie niezerowym wymaga dodatkowych przeliczeń. Strategia ELM wyklucza ponadto skończoną liczbę punktów osobliwych ze zbioru dopuszczalnych punktów początkowych sterowanego systemu, w których to występuje niebezpieczeństwo utknięcia systemu.

Metoda VFO pozwala na prawie analogiczne potraktowanie obu zadań sterowania – stabilizacji w punkcie i śledzenia dopuszczalnych i ustawicznie pobudzających trajektorii zmiennych w czasie. Przytoczone w pracy przykłady pokazały, że jedynymi różnicami między sposobami rozwiązania tych zadań dla danego systemu są postaci projektowanych pól zbieżności \mathbf{h} oraz metoda określania znaku skalarnej funkcji $k(\tau)$. Dodatkowo, zamieszczone rozważania teoretyczne nie ograniczają definicji punktu stabilizacji do początku układu współrzędnych w przestrzeni stanu, jak ma to miejsce w metodach σ M i ELM. Zastosowanie strategii VFO pozwala na projektowanie asymptotycznych *prawie stabilizatorów* oraz nieciągłych stabilizatorów asymptotycznych i praktycznych.

Żadna ze wspomnianych metod nie znalazła jak dotąd zastosowania do problemu podążania wzdłuż ścieżki (ang. *path following*).

Ad K3. Wykorzystanie metody σ M wymaga realizacji czterech ogólnych lecz dobrze określonych etapów projektowych: 1) znalezienia σ -procesu i nieciągłej transformacji modelu do nowej przestrzeni, 2) sprawdzenia czy istnieje ciągły stabilizator dla tak powstałego systemu transformowanego, 3) zaprojektowanie stabilizatora ciągłego dla systemu transformowanego, 4) zastosowanie odwrotnego σ -procesu do stabilizatora ciągłego, aby uzyskać nieciągły *prawie stabilizator* dla modelu oryginalnego. Pomimo, iż procedura ta jest przejrzysta, to etapy 1) i 2) są krytyczne. Nie ma bowiem ogólnych wskazówek gwarantujących znalezienie takiego σ -procesu dla danego systemu, który gwarantowałby istnienie ciągłego stabilizatora dla systemu transformowanego. Jest to pewne ograniczenie, które nie zmienia jednak faktu, iż dla wielu modeli taki σ -proces został zaproponowany [Ast96]. Problematyczna może być także realizacja etapu 3) dla systemów o dużym wy-

⁶Warto także dodać, iż w pewnych przypadkach modeli systemów metodologia VFO może znaleźć zastosowanie także przy większej liczbie sygnałów sterujących ($m > 2$).

miarze wektora stanu. Niejednoznaczność i brak ścisłych wytycznych co do wyboru σ -procesu może prowadzić do różnych postaci sterowników (i różnych jakości sterowania) dla tego samego systemu.

Strategia ELM stanowi rozszerzenie klasycznej metody opartej o analizę stabilności bezpośrednią metodą Lapunowa. Modyfikacja wynikająca z tej strategii wynika z tego, że gradient funkcji Lapunowa jest zawsze mnożony przez sumę dwóch tensorów: ujemnie określonego tensora symetrycznego oraz tensora skośnienasymetrycznego. Ogólna postać sterowania wyrażona poprzez funkcję Lapunowa i kombinację tensorów jest ściśle określona dla całej klasy systemów, co świadczy o systematyczności podejścia ELM.

Metoda VFO charakteryzuje się prostotą i systematycznością podejścia wynikającą z przyjętej wspólnej i intuicyjnej interpretacji geometrycznej strategii sterowania. Systematyczność metody VFO została przedstawiona w poprzednich rozdziałach, gdzie wyróżniono kilka podstawowych etapów projektowania sterowania. Co więcej, ogólne równania definiujące sterowania orientujące i popychające są zawsze takie same niezależnie od konkretnej postaci modelu. Dopiero ich szczegółowa postać jest charakterystyczna i wynika z modelu danego systemu. Należy jednak zaznaczyć, iż procedura projektowa związana z etapem wyprowadzania tzw. warunków orientowania nie jest do końca ściśle określona dla danego systemu i wymaga pewnej intuicji od projektanta sterowania. Kwestia ta ma większe znaczenie przede wszystkim w przypadku systemów o większej wymiarowości wektora stanu oraz z większą liczbą zmiennych stanu należących do zbioru zmiennych orientujących.

Ad K4. Z praktycznego punktu widzenia, oprócz statycznej jakości sterowania, istotna jest także jakość dynamiczna, która związana jest z takimi charakterystykami, jak oscylacyjność przebiegów przejściowych, a co za tym idzie koszt sterowania oraz szybkość zbieżności błędów regulacji, a także liczba *nawrotów* systemu w stanach przejściowych (objawiająca się występowaniem ostrych wierzchołków w przebiegu trajektorii stanu).

Analiza dostępnych przykładów wykorzystania metody σ M pokazuje, iż w przebiegu zmiennych stanu w etapie przejściowym zwykle nie występują *nawroty* systemu, co skutkuje gładką i naturalną ewolucją systemu oraz względnie niskim kosztem sterowania. Oscylacyjność przebiegów zmiennych stanu zależy od rozważanego modelu systemu i wybranego σ -procesu, lecz generalnie jest ona akceptowalna. Zbieżność błędów stabilizacji ma charakter wykładniczy, a uzyskiwana jakość dynamiczna nie jest wrażliwa na zmianę warunków początkowych czy wartości parametrów sterownika.

Strategia ELM nie gwarantuje natomiast nieoscylacyjnego przebiegu sygnałów sterujących oraz zmiennych stanu systemu. Okazuje się, że jakość dynamiczna sterowania (oscylacyjność, liczba *nawrotów* oraz szybkość zbieżności błędów regulacji) zależy tutaj nie tylko od własności rozważanego modelu systemu, ale również od wartości parametrów sterownika i warunków początkowych. Strategia ELM dopuszcza ponadto występowanie poza punktem stabilizacji skończonej liczby niestabilnych punktów równowagi układu zamkniętego – system może utknąć w tych punktach, gdy znajduje się w nich w chwili początkowej.

W przypadku metody VFO mamy do czynienia z naturalną i nieoscylacyjną ewolucją sterowanych systemów zarówno podczas realizacji zadań śledzenia jak i stabilizacji. Jest to własność metody VFO. Wynika ona bezpośrednio z interpretacji geometrycznej stanów-

iącej, w przekonaniu autora, uogólnienie koncepcji sterowania we współrzędnych biegunowych. Przebieg trajektorii stanu charakteryzuje występowanie maksymalnie pojedynczego *nawrotu* w etapie przejściowym. Zbieżność błędów sterowania jest szybka (prawie wykładnicza) i nie jest wrażliwa na warunki początkowe oraz wartości parametrów sterownika.

Ad K5. Metoda σM w zasadzie nie ma szczególnej interpretacji geometrycznej. Jej istota polega na nieciągłej transformacji zmiennych stanu do nowej przestrzeni i rozważaniu problemu stabilizacji dla modelu nieciągłego. Zatem można powiedzieć, że prawa sterowania metody σM wynikają z użycia pewnych formalnych technik matematycznych bez żadnej szczególnej interpretacji geometrycznej kolejnych składników sterowania.

Interpretacja geometryczna strategii ELM związana jest z rolą jaką odgrywają wykorzystywane w niej tensory: symetryczny i skośnienasymetryczny. Pierwszy jest odpowiedzialny za stabilizację systemu na pewnej rozmaitości (nieskończenie wiele stabilnych punktów równowagi układu zamkniętego), drugi natomiast czyni wszystkie punkty tej rozmaitości, poza punktem referencyjnym, punktami niestabilnymi.

Wydaje się, że najbardziej intuicyjną i przejrzystą interpretację geometryczną posiada metoda VFO. Sama metoda bowiem jest owocem tej interpretacji. Dekompozycja procesu sterowania na dwa podprocesy – orientowanie i popychanie – przypomina i uogólnia koncepcję sterowania we współrzędnych biegunowych, znaną wszystkim użytkownikom nieholonomicznych pojazdów kołowych. Interpretacja ta uzasadnia i wyjaśnia zaproponowaną ogólną postać prawa sterowania VFO.

Ad K6. Synteza parametryczna sterowników z rodziny σM charakteryzuje się zwykle dużą prostotą w nieciągłej przestrzeni stanu, czyli po transformacji modelu oryginalnego za pomocą odpowiednio wybranego σ -procesu. Jest ona wówczas analogiczna do techniki lokowania biegunów znanej z liniowej teorii sterowania i tym samym nie zależy od warunków początkowych systemu. Należy jednak zaznaczyć, iż nieodpowiedni wybór σ -procesu może prowadzić do takiej postaci modelu transformowanego, iż synteza sterownika nie będzie już tak prosta i przejrzysta. Dodatkowo, przeprowadzenie syntezy dla wynikowego sterownika nieciągłego (po transformacji odwrotnej) bez odwoływania się do postaci stabilizatora z nieciągłej przestrzeni stanu może już sprawiać poważne trudności.

Stabilizatory ELM są trudniejsze w strojeniu, gdyż nie ma ogólnych wskazówek związanych z doбором wartości parametrów sterownika. Problematyczne wydaje się także określenie wystarczająco przejrzystego wpływu poszczególnych nastaw na jakość dynamiczną sterowania dla dowolnego modelu systemu.

Dobór wartości parametrów sterowników VFO zarówno dla zadań śledzenia jak i stabilizacji jest bardzo prosty i niezależny od warunków początkowych systemu. Co więcej, sposób syntezy i wpływ poszczególnych parametrów na jakość dynamiczną sterowania jest analogiczny dla całej klasy rozważanych systemów i wynika wprost ze wspólnej interpretacji geometrycznej sterowania⁷.

⁷Szczegółową analizę wpływu wszystkich współczynników sterowników VFO na jakość sterowania przeprowadzono dla robota jednokołowego i manipulatora nieholonomicznego w rozdziale 3.

Ad K7. Porównując postaci stabilizatorów robota jednokołowego dla wszystkich trzech metod – σM , ELM oraz VFO – (patrz [Ast96, TUT02] oraz podpunkt 3.1 tej pracy), a także porównując stabilizatory dla trójwymiarowego systemu łańcuchowego dla metod σM oraz VFO⁸ można dojść do wniosku, że dla pewnych modeli (oraz odpowiednio wybranego σ -procesu) najprostszą postać posiadają sterowniki zaproponowane przez Astolfiego. Zwykle bardziej skomplikowaną postać mają prawa sterowania pozostałych dwóch metod, przy czym tylko stabilizator VFO wymaga sprzężenia zwrotnego od pochodnych wektora stanu⁹.

W wielu przypadkach stabilizatory metody σM mają nieskomplikowane struktury (szczególnie w pomocniczej przestrzeni stanu) i wydają się względnie proste w implementacji. Podkreślny jednak, że ostateczna postać takich stabilizatorów dla oryginalnej przestrzeni stanu zależy bezpośrednio od przyjętego σ -procesu oraz postaci modelu sterowanego systemu. Zatem przy specyficznym doborze transformacji nieciągłej, ostateczna postać takich sterowników może być bardziej skomplikowana.

Stabilizatory ELM mogą mieć różne struktury w zależności do wyboru postaci funkcji Lapunowa. Ogólna postać takich sterowników wydaje się bardziej złożona od tych, wynikających z metody σM . Z ogólnej postaci prawa sterowania metody ELM wynika, iż zwykle nie wymagają one sprzężenia zwrotnego od pochodnych zmiennych stanu systemu.

Sterowniki VFO z zaproponowaną w niniejszej pracy postacią składowych pola zbieżności \mathbf{h} zawsze wymagają sprzężenia od sygnałów prędkościowych, a w przypadku systemów o wymiarze większym niż 3 także od wyższych pochodnych. Świadczy o tym choćby ogólna postać sterowania orientującego, w której występuje składnik wyprzedzający. Złożoność obliczeniowa zależy od przyjętych postaci takich elementów, jak: pole wektorowe zbieżności \mathbf{h} oraz funkcja $\delta(\cdot)$ występująca w definicji wirtualnej prędkości referencyjnej $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*$ oraz od postaci modelu rozważanego systemu.

Wnioski przedstawione powyżej, a zebrane w tabelach 4.1 oraz 4.2, mają w istocie charakter jakościowy. Ostateczna analiza porównawcza dająca pełny obraz własności praw sterowania rozważonych wyżej metod wymaga także badań ilościowych. Ze względu na wspomniane wcześniej kwestie związane z brakiem – na dzień dzisiejszy – miarodajnych wskaźników jakości, kwestia analizy ilościowej pozostaje nadal otwartym problemem badawczym.

Podsumowując należy zaznaczyć, iż poczyniona wyżej analiza porównawcza stanowi odzwierciedlenie przekonań autora i jest oparta o dzisiejszy stan wiedzy związany z własnościami rozważanych metod sterowania. Wszystkie metody nadal są przedmiotem inten-

⁸Zgodnie z wiedzą autora, postać stabilizatora ELM dla tego systemu nie została jeszcze podana w literaturze.

⁹W przypadku, gdy są to pierwsze pochodne, sygnały te można zastąpić funkcjami samych zmiennych stanu korzystając bezpośrednio z modelu kinematyki i unikając w ten sposób konieczności pomiaru sygnałów prędkościowych.

sywnych badań teoretycznych, jak i prób symulacyjnych czy eksperymentalnych. Z tego powodu należy przypuszczać, iż w przyszłości wnioski wysunięte na podstawie powyższej analizy mogą wymagać ponownej weryfikacji.

Tab. 4.1: Porównanie metody VFO z wybranymi strategiami sterowania: σ M oraz ELM.

	σ M	ELM	VFO
K1 zakres stosowalności	nieliniowe systemy bezdryfowe, dla których $\dim(\mathbf{q}) = n$, $\dim(\mathbf{u}) = n - p$, $0 < p < n$; wymagany σ -proces	nieholonomiczne systemy bezdryfowe pierwszego rzędu, dla których $\dim(\mathbf{q}) \leq m(m+1)/2$, $\dim(\mathbf{u}) = m$	nieholonomiczne systemy bezdryfowe ze specjalną postacią pół-generatorów; testy dla $\dim(\mathbf{q}) = n = \{3, 4\}$, $\dim(\mathbf{u}) = 2$; także holonomiczne systemy z dryfem
K2 rozwiązane zadania sterowania	asymptotyczna <i>prawie stabilizacja</i> oraz asymptotyczna i praktyczna stabilizacja w punkcie (zerowy punkt referencyjny)	asymptotyczna <i>prawie stabilizacja</i> oraz asymptotyczna stabilizacja w punkcie (zerowy punkt referencyjny); gwarancja stabilizacji w obszarze z wyłączonej skończoną liczbą punktów początkowych systemu (punkty osobliwe);	asymptotyczna i praktyczna stabilizacja w dowolnym punkcie (zerowym lub niezerowym) oraz asymptotyczne śledzenie dopuszczalnych i ustawicznie pobudzających trajektorii zmiennych w czasie
K3 system- atyczność metody	dobrze określona metodologia projektowa (4 główne etapy); brak sposobu i niejednoznaczność wyboru σ -procesu oraz stabilizatora dla systemu transformowanego; postać sterowania zależy od przyjętego σ -procesu	ściśle zdefiniowana ogólna postać prawa sterowania dla całej klasy systemów	ściśle zdefiniowana ogólna postać prawa sterowania dla całej klasy systemów wynikająca z intuicyjnej interpretacji geometrycznej; wspólna strategia sterowania dla zadań śledzenia i stabilizacji; w procesie projektowym brak ścisłych reguł wyprowadzania tzw. warunków orientowania

Tab. 4.2: Porównanie metody VFO z wybranymi strategiami sterowania: σM oraz ELM (c.d.).

	σM	ELM	VFO
K4 jakość dynamiczna sterowania	przeważnie brak <i>nawrotów</i> w przebiegu trajektorii systemu w stanach przejściowych; naturalna ewolucja zmiennych stanu – relatywnie niski koszt sterowania i względnie mała oscylacyjność (zależy od modelu systemu i σ -procesu); wykładnicza zbieżność błędów sterowania	jakość stanów przejściowych (liczba <i>nawrotów</i> w przebiegu trajektorii systemu w stanach przejściowych oraz oscylacyjność przebiegów) oraz szybkość zbieżności błędów sterowania wrażliwe na warunki początkowe systemu i wartości parametrów sterownika; występują niestabilne punkty równowagi układu zamkniętego poza punktem stabilizacji	naturalna i nieoscylacyjna ewolucja zmiennych stanu – relatywnie niski koszt sterowania; szybka (<i>prawie</i> wykładnicza) zbieżność błędów sterowania; maksymalnie jeden <i>nawrót</i> w przebiegu trajektorii stanu w etapie przejściowym; jakość dynamiczna niewrażliwa na warunki początkowe i wartości parametrów sterownika
K5 interpretacja geometryczna sterowania	brak szczególnej interpretacji geometrycznej poza nieciągłą transformacją zmiennych stanu	interpretacja roli tensorów: symetrycznego i skośniasymetrycznego	intuicyjna i przejrzysta interpretacja geometryczna stanowi istotę metody; uogólnienie sterowania we współrzędnych biegunowych
K6 synteza sterownika	zwykle bardzo prosta i niezależna od warunków początkowych w pomocniczej przestrzeni stanu (po zastosowaniu σ -procesu); w przestrzeni pomocniczej sposób syntezy wspólny dla całej klasy systemów i analogiczny do metod liniowej teorii sterowania; w przestrzeni oryginalnej wpływ poszczególnych współczynników na jakość sterowania zwykle trudny do oszacowania, co utrudnia syntezę	trudna – brak ogólnych wskazówek związanych z wyborem wartości współczynników; wpływ poszczególnych parametrów sterownika na jakość dynamiczną sterowania nie jest wystarczająco przejrzysty	wyjątkowo prosta, niezależna od charakteru sygnałów referencyjnych (trajektoria lub stały punkt referencyjny) oraz warunków początkowych; sposób syntezy wspólny dla całej klasy systemów; przejrzysty wpływ poszczególnych parametrów na jakość dynamiczną sterowania
K7 złożoność implementacji	bardzo prosta struktura sterowników dla wybranych modeli systemów; złożoność obliczeniowa zależy od przyjętego σ -procesu; nie wymaga sprzężenia od pochodnych zmiennych stanu	bardziej skomplikowana struktura sterowników; złożoność obliczeniowa zależy od przyjętej funkcji Lapunowa; nie wymaga sprzężenia od pochodnych zmiennych stanu	bardziej skomplikowana struktura sterowników; złożoność obliczeniowa zależy od przyjętej postaci pola zbieżności h i funkcji $\delta(\cdot)$ w definicji wirtualnej prędkości referencyjnej; konieczność sprzężenia od pochodnych zmiennych stanu wynika z przyjętej postaci pola zbieżności h

Podsumowanie i dalsze kierunki badań

5.1 Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono koncepcję projektowania sterowników metodą orientowania pól wektorowych dla dwóch zadań sterowania: śledzenia trajektorii zmiennych w czasie oraz stabilizacji w punkcie.

Ogólna strategia i idea metody VFO oraz jej geometryczna interpretacja wynikająca z prostej analizy ogólnej postaci modeli rozważanych systemów i ich potencjalnej ewolucji w czasie zostały zaprezentowane w rozdziale 2. W tym samym rozdziale zaproponowano nową terminologię ściśle związaną z prezentowaną metodą VFO i dotyczącą własności modeli rozważanej podklasy systemów. Wprowadzona i wykorzystana terminologia pozwoliła na ścisłą analizę poszczególnych modeli z punktu widzenia zastosowania nowej strategii. W świetle metody VFO przedstawiono również nowy podział trajektorii referencyjnych oraz definicje referencyjnych trajektorii dopuszczalnych i ustawicznie pobudzających rozważanych w dalszej części pracy, a także przedyskutowano kwestię spełnienia warunków koniecznych związanych ze stosowalnością metodologii VFO.

Rozdział trzeci poświęcono zastosowaniom nowej koncepcji sterowania. Zaprojektowano sterowniki dla trzech wybranych układów nieholonomicznych o trójwymiarowym wektorze stanu oraz dla jednego przykładu spoza tytułowej podklasy systemów. Dla każdego przykładu rozwiązano dwa zadania sterowania: śledzenie trajektorii zmiennych w czasie oraz stabilizację w punkcie. We wszystkich przypadkach zastosowano podobną procedurę projektową oraz dowodową i uzyskano asymptotyczną¹ zbieżność błędów regulacji do zera. Zaproponowane sterowniki mają naturę nieciągłą, przy czym zbiór punktów nieciągłości jest albo nieprzyciągający, lub ma miarę zero. W przypadku zadania stabilizacji, dla każdego z rozważonych układów nieholonomicznych zaproponowano zarówno *prawie* stabilizatory gwarantujące asymptotyczną zbieżność błędów regulacji do zera², jak również ich modyfikację pozwalającą uzyskać asymptotyczną lub praktyczną stabilizację punktu referencyjnego. Jakość działania wszystkich sterowników asymptotycznych zilustrowano

¹W przypadku czwartego z rozważonych systemów (afinicznego z dryfem) zbieżność błędów miała charakter ściśle wykładniczy.

²Prawie stabilizatory nie gwarantują stabilności w sensie Lapunowa, ponieważ punkt stabilizacji nie jest punktem równowagi układu zamkniętego.

wynikami symulacyjnymi. Dodatkowo, dla dwóch pierwszych przykładów systemów przeprowadzono analizę wpływu wartości poszczególnych współczynników projektowych wprowadzonych sterowników na jakość dynamiczną sterowania. Wykorzystanie metody VFO do ostatniego z rozważonych w rozdziale trzecim systemów (nienależącego do tytułowej podklasy systemów) miało na celu ukazanie pewnej uniwersalności oraz szerszego zakresu stosowalności nowej metodologii sterowania traktującej w sposób analogiczny systemy o tak różnych własnościach.

W rozdziale czwartym przeprowadzono klasyfikację metody VFO w świetle dzisiejszego stanu wiedzy z zakresu sterowania układami nieholonomicznymi. Zawarto tam również jakościową analizę porównawczą przedstawionej metody VFO z dwoma wybranymi alternatywnymi strategiami sterowania znanymi z literatury przedmiotu.

5.2 Dalsze kierunki badań

W rozdziale trzecim wyprowadzone zostały i symulacyjnie przetestowane prawa sterowania dla czterech wybranych systemów dynamicznych. Zaproponowane sterowniki wynikały z przyjęcia konkretnej postaci pola zbieżności \mathbf{h} oraz funkcji $\delta(\cdot)$ związanej z wprowadzoną tzw. wirtualną prędkością referencyjną $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*$. Uzyskane wyniki teoretyczne jak i symulacyjne mogą być zadowalające z punktu widzenia realizacji postawionych wcześniej zadań sterowania. Wiele zagadnień pozostaje jednak nadal ważnymi i nierozwiązanymi bądź nieporuszonymi dotychczas problemami. Wytyczają one dalsze możliwe kierunki badań teoretycznych oraz eksperymentalnych. Skomentujemy teraz krótko najważniejsze kwestie istotne w punktu widzenia dalszego rozwoju i doskonalenia metody VFO.

- Zaprezentowane sterowniki VFO dla obu rozważanych zadań sterowania (śledzenia i stabilizacji) mają analogiczną strukturę, a podstawowa różnica między nimi wynika z zastąpienia rzeczywistej prędkości referencyjnej $\dot{\mathbf{q}}_t^*$ prędkością wirtualną $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*$ zanikającą do zera w referencyjnym punkcie stabilizacji. Takie jednolite podejście nasuwa przypuszczenie, iż możliwe jest dla danego systemu proste połączenie sterownika śledzącego ze stabilizatorem w jeden uniwersalny algorytm. Taka strategia pozwalałaby wyeliminować konieczność przełączania pomiędzy sterownikami przy zmianie zadania sterowania.

Dodatkowo, metodę VFO warto także spróbować zastosować do rozwiązywania zadania podążania wzdłuż ścieżki (ang. *path following*). Jest to uzasadnione potrzebami praktycznymi, gdyż jak się okazuje, większość zadań ruchu dedykowanych np. dla pojazdów kołowych ma charakter właśnie podążania wzdłuż ścieżki geometrycznej nieparametryzowanej czasem.

- Jak już wspomniano w poprzednich rozdziałach, postać pola wektorowego zbieżności \mathbf{h} może być definiowana na różne sposoby. W pracy tej zaproponowano jedną z takich postaci jako liniową kombinację ważonego błędu regulacji i odpowiedniego składnika prędkościowego. Ciekawym problemem wydaje się próba znalezienia innych alternatywnych konstrukcji tego pola i analizy wpływu jego postaci na jakość sterowania. Co więcej, inna postać pola \mathbf{h} będzie determinować inne lokalizacje punktów osobi-

wych, w których pewne składowe tego pola ulegają degeneracji do zera i wymagają nieciągłych przełączeń sygnałów sterujących.

- Kolejnym elementem dającym projektantowi dodatkową swobodę w kształtowaniu jakości pracy sterowników VFO jest funkcja $\delta(\cdot)$ występująca w definicji prędkości wirtualnej $\dot{\mathbf{q}}_{vt}^*$. Funkcja ta odpowiada za kształt stanów przejściowych i zachowanie systemu w pobliżu punktu stabilizacji. Jest to szczególnie widoczne w przypadku stabilizacji nieholonomicznych pojazdów kołowych i może być bardzo pomocne w realizacji zadań parkowania. Różne alternatywne postaci funkcji $\delta(\cdot)$ mogą pomóc w uwzględnieniu własności manewrowych konkretnych pojazdów i ułatwić bądź zoptymalizować realizację zadania pożądanego dojazdu do punktu stabilizacji.
- Intensywnych prac wymagają również kwestie praktycznej implementacji i weryfikacji zaproponowanych sterowników. Problemy praktyczne dotyczą przede wszystkim kwestii uwzględnienia ograniczeń sygnałów sterujących w rzeczywistym systemie³ oraz analizy odporności praw sterowania VFO na takie zjawiska, jak szумы pomiarowe, zakłócenia w torze sterowania, efekty dynamiczne nieuwzględnione w modelu kinematycznym czy niepewność parametryczna i strukturalna przyjętego modelu matematycznego.
- Nadal nierozwiązanym problemem pozostaje określenie warunków dostatecznych stosowalności metody VFO, czyli kwestia ścisłego zdefiniowania rozważanej podklasy systemów, do których tę metodę można stosować. W najbliższym czasie planuje się rozszerzenie obszaru wykorzystania metodologii VFO do systemów o wymiarze większym niż 3. Pierwsze próby już poczyniono i uzyskano w tym zakresie obiecujące wyniki [MK05e].

W rozdziale 3 pokazano, iż strategia VFO ma szerszy zakres stosowalności niż wskazywałby tytuł niniejszej pracy i być może stanowi wspólną i uniwersalną metodologię łączącą w pewnym sensie liniowe i nieliniowe techniki sterowania. Szczegółowe zbadanie takich powiązań oraz próba wykorzystania metody do coraz to innych modeli systemów o różnych własnościach stanowi, w przekonaniu autora, ciekawy temat przyszłych prac badawczych.

³Problem ograniczeń sygnałów sterujących w związku z realizacją zadania stabilizacji metodą VFO dla wózka dwukołowego został już wstępnie poruszony w pracy [KMMP06].

Stanowisko badawcze

Niniejszy rozdział prezentuje stanowisko badawcze z doświadczalnym robotem mobilnym systemu MMS (*Modular Mobile System*) wykorzystane przez autora do przeprowadzenia testów nowych algorytmów sterowania zaproponowanych w pierwszej części pracy. Poza opisem konstrukcji, parametrów robota oraz architektury zrealizowanego systemu sterowania skomentowane zostaną wybrane szczegóły implementacji obwodów regulacji prędkości kół platformy mobilnej oraz istotne szczegóły realizacji sterowników VFO.

6.1 Modułowa konstrukcja systemu MMS

Modułowy system mobilny MMS (*Modular Mobile System*) został zaprojektowany i wykonany w Katedrze Sterowania i Inżynierii Systemów Politechniki Poznańskiej. Celem realizacji systemu było stworzenie uniwersalnego stanowiska eksperymentalnego pozwalającego na praktyczną weryfikację algorytmów sterowania dedykowanych dla jednej z trzech popularnych struktur kinematycznych nieholonomicznych kołowych pojazdów mobilnych takich, jak dwukołowy pojazd z napędem różnicowym (*two-wheeled differentially driven vehicle*), samochód kinematyczny z napędem na tylną oś (*car-like vehicle*) oraz czterokołowy pojazd ślizgowy (*skid steering vehicle*).

MMS system składa się z tzw. modułów jednych, które można swobodnie łączyć w jedną z wyżej wspomnianych konfiguracji kinematycznych. Dostępnych jest siedem modułów: cztery identyczne podstawowe aktywne moduły jezdne DM (*Driving Module*) z dwoma kołami napędowymi, jeden aktywny moduł jezdny SM (*Steering Module*) z nienapędzaną osią skrętną oraz dwa pasywne moduły CM (*Castor Module*) jezdne z pojedynczym biernym kołem podtrzymującym. Poszczególne struktury kinematyczne można uzyskać poprzez następujące połączenia modułów:

- S1. DM+CM – dwukołowy pojazd z napędem różnicowym,
- S2. DM+SM – samochód kinematyczny z napędem na tylną oś,
- S3. DM+DM – czterokołowy pojazd ślizgowy.

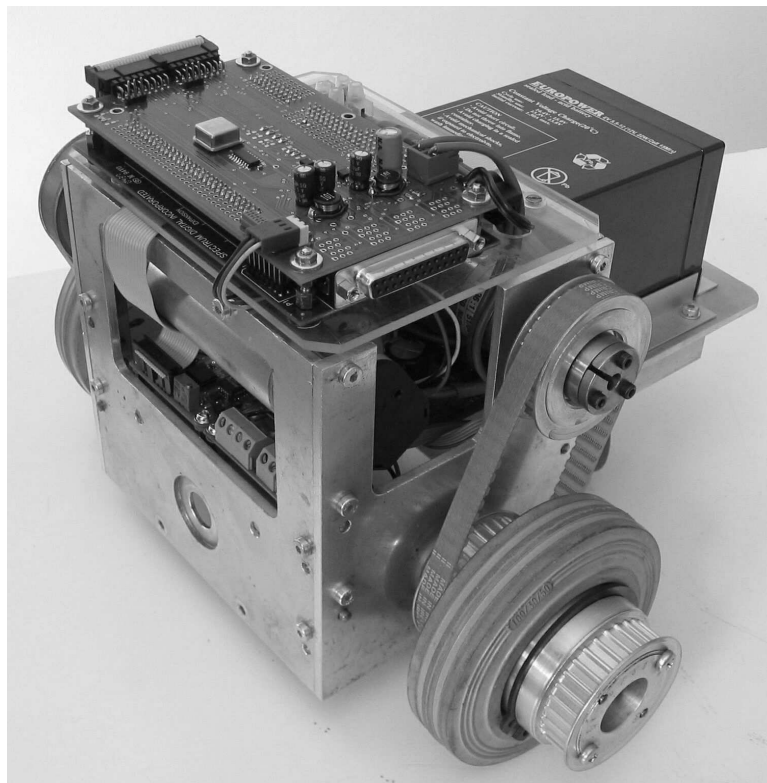
Dodatkowo, realizacja struktury S2 wymaga szeregowego połączenia silników modułu DM (na poziomie elektrycznym), aby uzyskać efekt związany z działaniem mechanizmu różni-

cowego tylnej osi. Realizacja struktury S3 wymaga natomiast elektrycznego i logicznego bądź mechanicznego sprzęgnięcia napędów obu modułów DM odpowiednio po lewej i prawej stronie pojazdu.

Wyniki badań przedstawione w następnym rozdziale związane są z eksperymentami przeprowadzonymi dla pojazdu o strukturze S1. Z tego względu w dalszej części uwaga skupiona zostanie na opisie tej właśnie struktury.

6.2 Dwukołowy pojazd mobilny

Dwukołowy pojazd mobilny MMS, którego widok ogólny w strukturze S1 przedstawia rys. 6.1, składa się z aktywnego modułu jezdnego DM połączonego z pasywnym modulem podtrzymującym CM. Moduł DM wyposażono w dwa niezależne napędy prądu stałego

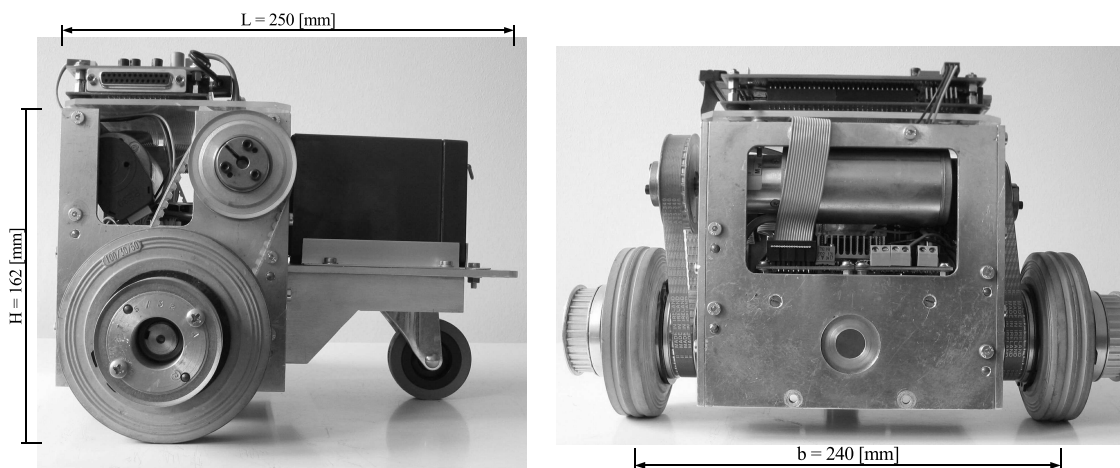


Rys. 6.1: Dwukołowy robot mobilny MMS z biernym kołem podtrzymującym.

typu GR42x40 (Dunkermotoren), połączone z kołami jezdnyymi poprzez zębate przekładnie redukcyjne o stopniu przełożenia $\mu = 36 : 1$. Bezpośrednie przeniesienie napędu między wałami przekładni a osiami kół zrealizowano za pomocą połączeń pasowych z pasami zębatymi (stopień przełożenia $\mu_1 = 1 : 1$). Każdy napęd zintegrowano z czujnikiem pozycji wału w postaci przetwornika obrotowo-impulsowego o rozdzielczości $N_c = 500$ [imp] na jeden obrót silnika¹. Oba napędy wyposażono w niezależne układy wzmacniaczy mocy zrealizowane w oparciu o układ LMD18200 (National Semiconductors) oraz w pomocnicze

¹Po uwzględnieniu sygnałów z obu faz czujnika uzyskano rozdzielczość $N_{cAB} = 2000$ [imp] na jeden obrót silnika.

obwody regulacji/ograniczenia prądu z modulatorami szerokości impulsów (MSI) TL494. Od strony pomiarowej, układy końcówek mocy przystosowano do pomiaru chwilowych wartości prądu silników. Z punktu widzenia fizycznej realizacji sygnałów sterujących, końcówki mocy zaprojektowano tak, aby możliwe było wybranie jednego z trzech trybów sterowania: tryb napięciowy jednobiegunowy lub dwubiegunowy (sygnał sterujący ma charakter napięcia twornika²) oraz tryb prądowy (sygnał sterujący ma charakter prądu w uzwojeniu twornika³).



Rys. 6.2: Robot mobilny MMS – widok z boku. **Rys. 6.3:** Robot mobilny MMS – widok z przodu.

Część obliczeniową układu sterowania napędami oraz podstawową jednostkę realizującą zadania wyższego poziomu stanowi płyta eZdsp F2812 (Spectrum Digital) ze stałoprzecinkowym procesorem sygnałowym TMS320F2812 (Texas Instruments) taktowanym zegarem o częstotliwości $f_{clk} = 150$ [MHz]. Podstawowymi zadaniami tej części systemu jest realizacja pomiarów sygnałów zwrotnych, obliczenia pętli regulacyjnych napędów, obliczenia lokalizacji platformy robota, obliczenia sterownika nadrzędnego robota⁴, generowanie w czasie rzeczywistym wszystkich sygnałów referencyjnych oraz komunikacja z zewnętrznym komputerem nadrzędnym (poprzez łącze radiowe lub kablowo poprzez interfejs JTAG).

Podstawowe źródło zasilania modułu jezdnego stanowi akumulator o napięciu $U_z = 12$ [V] i pojemności 5 [Ah], który może zostać zamontowany w dolnej części modułu DM lub na górze płyty nośnej modułu CM (rysunki 6.1-6.2 prezentują opcję z montażem na płycie modułu CM).

Podstawowe wymiary (patrz rys. 6.2-6.3) oraz wybrane informacje związane z wartościami parametrów i osiąganiami prezentowanego robota o strukturze S1 zebrano w tabeli 6.1.

²W tym trybie modulator TL494 pełni rolę ogranicznika prądu silnika.

³W tym trybie modulator TL494 pracuje w układzie kaskadowym jako podrzędny regulator prądu.

⁴W tym przypadku sterownika VFO.

Tab. 6.1: Zestawienie podstawowych parametrów mechanicznych i elektrycznych modułu DM.

Parametr	Opis	Wartość	Jednostka
L	długość połączonych modułów DM+CM	0.250	[m]
H	wysokość modułu DM	0.162	[m]
b	rozstaw między kołami	0.240	[m]
r	promień koła jezdnego	0.05	[m]
ω_{kmax}	maksymalna prędkość obrotowa koła	≈ 2.1	[obr/s]
Ω_{max}	maksymalna prędkość obrotowa platformy	≈ 0.875	[obr/s]
V_{max}	maksymalna prędkość postępową platformy	≈ 0.66	[m/s]
U_z	napięcie zasilania modułu DM	12	[V]
U_{zs}	napięcie zasilania silników	12	[V]
I_{max}	maksymalny dopuszczalny prąd silnika	± 4.4	[A]
P_s	moc znamionowa silnika	20	[W]
μ	całkowite przełożenie przekładni	36 : 1	[-]
N_c	rozdzielczość czujnika obrotowo-impulsowego	500	[imp/obr]

6.3 Szczegóły realizacji układu sterowania

Układ sterowania robota MMS ma strukturę hierarchiczną i składa się z dwóch jednakowych i niezależnych obwodów regulacji prędkości prawego i lewego koła oraz z nadrzędnego sterownika platformy połączonego z generatorem sygnałów referencyjnych.

6.3.1 Obwód regulacji prędkości koła robota

Podrzędny obwód regulacji prędkości koła składa się z pięciu podstawowych bloków dynamicznych przedstawionych na rys. 6.4⁵:

B1. blok dynamiki napędu,

B2. blok estymatora prędkości napędu o transmitancji: $G_{est}(s) = \frac{s}{1 + sT} = \frac{\Omega_f(s)}{\Theta(s)}$,

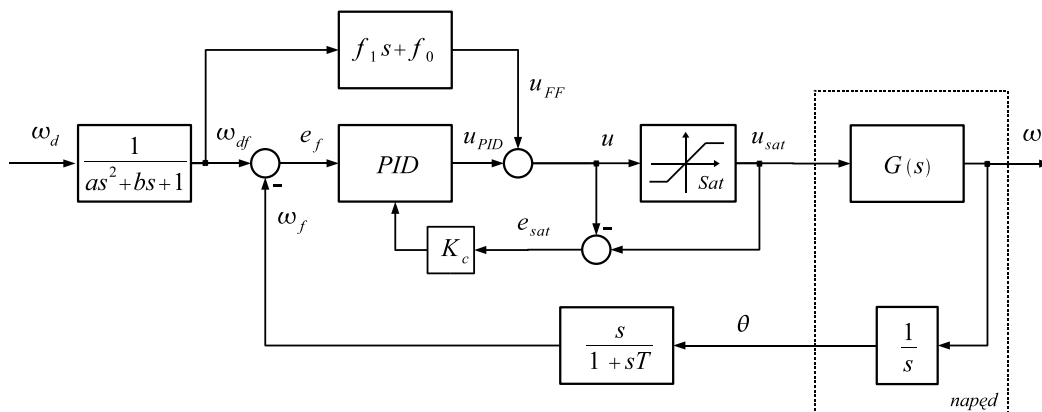
B3. blok sprzężenia wyprzedzającego o transmitancji: $G_{FF}(s) = f_1s + f_0 = \frac{U_{FF}(s)}{\Omega_{df}(s)}$,

B4. blok regulatora PID z korekcją bloku całkującego (tzw. *anti-windup*),

B5. blok fitru wstępnego o transmitancji: $G_f(s) = \frac{1}{as^2 + bs + 1} = \frac{\Omega_{df}(s)}{\Omega_d(s)}$.

Krótko skomentujemy działanie i przeznaczenie poszczególnych bloków.

⁵Pominięto dodatkowy obwód ograniczenia prądu silnika oraz przyjęto jednostkową transmitancję bloku zastosowanego wzmacniacza mocy (czasy opóźnienia charakteryzujące pracę H-mostka LMD18200 są pomijalnie małe).



Rys. 6.4: Schemat blokowy układu regulacji prędkości dla pojedynczego koła robota MMS.

Blok B1. Zgodnie z powszechnie przyjmowanym liniowym modelem napędu z silnikiem prądu stałego, blok B5 wiążący prędkość silnika $\Omega(s)$ z napięciem twornika $U_{sat}(s)$ można przedstawić za pomocą transmitancji drugiego rzędu:

$$G(s) \triangleq \frac{\Omega(s)}{U_{sat}(s)} = \frac{\frac{k_i}{JL}}{s^2 + \frac{JR+Lb}{JL}s + \frac{Rb+k_ik_\omega}{JL}},$$

gdzie J, b, L, R oraz k_i, k_ω są odpowiednio momentem bezwładności widzianym po stronie wirnika, współczynnikiem tarcia wiskotycznego widzianym po stronie wirnika, indukcyjnością uzwojeń wirnika, rezystancją uzwojeń wirnika oraz stałymi maszynowymi (stała prądowa i stała prędkościowa). Ze względu na istniejącą tendencję do minimalizacji indukcyjności uzwojenia twornika w procesie produkcji nowoczesnych napędów, w dalszej analizie i projektowaniu pominięto składową dynamiki związaną z obwodem elektromagnetycznym jako nieznaczącą w stosunku do składowej mechanicznej. W efekcie uzyskano zredukowany model pierwszego rzędu postaci:

$$G(s) \triangleq \frac{\Omega(s)}{U_{sat}(s)} = \frac{k}{T_m s + 1}, \quad \text{gdzie:} \quad k = \frac{k_i}{Rb + k_ik_\omega}, \quad T_m = \frac{JR}{Rb + k_ik_\omega}. \quad (6.1)$$

Blok B2. Sygnał ω_f wykorzystywany jako sygnał zwrotny w układzie regulacji wynika z estymacji prędkości silnika realizowanej na podstawie pomiaru zmiany chwilowej pozycji wału w ustalonym czasie równym okresowi T_p . Dodatkowo wprowadzono filtrację pierwszego rzędu ze stałą czasową T w celu zmniejszenia poziomu szumu w sygnale zwrotnym. W dyskretnej dziedzinie czasu estymator prędkości zrealizowano stosując transformację *Eulera wstecz*⁶. Ostatecznie zaimplementowano algorytm estymacji równoważny następującemu równaniu różnicowemu:

$$\omega_f(n) = \frac{T}{T + T_p} \omega_f(n-1) + \frac{1}{T + T_p} [\theta(n) - \theta(n-1)], \quad (6.2)$$

gdzie n oznacza numer próbki sygnału dyskretnego.

⁶Różniczkę $d\theta$ przybliżono skończoną różnicą wstecz: $\Delta\theta = \theta(n) - \theta(n-1)$.

Blok B3. Transmitancja bloku sprzężenia wyprzedzającego wynika z odwrotności transmitancji dynamiki napędu, przy czym przyjęto tutaj zredukowany model (6.1). W realizacji cyfrowej zastosowano dyskretyzację transmitancji $G_{FF}(s)$ metodą *Eulera wstecz* i ostatecznie zaimplementowano następujące równanie różnicowe:

$$u_{FF}(n) = K_{FF1}[\omega_{df}(n) - \omega_{df}(n-1)] + K_{FF0} \hat{u}_{FF}(n), \quad (6.3)$$

gdzie K_{FF1} oraz K_{FF0} są współczynnikami bloku wyprzedzającego, a $\hat{u}_{FF}(n) = f(\omega_{df}(n))$ jest składową statyczną sygnału wyprzedzającego obliczaną na podstawie doświadczalnie określonych charakterystyk statycznych zastosowanego silnika (doświadczalnie określono dwa odrębne równania prostych: $\hat{u}_{FF+}(n) = 0.1566\omega_{df}(n) + 0.2626$ oraz $\hat{u}_{FF-}(n) = 0.1597\omega_{df}(n) - 0.3694$ odpowiadające charakterystykom statycznym $u - \omega$ silnika dla obu kierunków ruchu⁷).

Blok B4. Blok regulatora realizuje algorytm PID z dodatkową korekcją składnika całkującego wynikającą z konieczności ograniczenia zjawiska *windup-u*⁸. Struktura zastosowanego regulatora z korektorem wynika z następujących równań (por. rys. 6.4):

$$\begin{aligned} e_f(\tau) &= \omega_{df}(\tau) - \omega_f(\tau), \\ u_P(\tau) &= K_p e_f(\tau), \\ u_D(\tau) &= T_d \dot{e}_f(\tau), \\ u_I(\tau) &= \frac{1}{T_i} \int_0^\tau e_f(\xi) d\xi, \\ \bar{u}_I(\tau) &= u_I(\tau) + K_c e_{sat}(\tau - T_o), \\ u_{PID}(\tau) &= u_P(\tau) + u_D(\tau) + \bar{u}_I(\tau) \\ e_{sat}(\tau) &= u_{sat}(\tau) - u(\tau), \\ u(\tau) &= u_{PID}(\tau) + u_{FF}(\tau), \\ u_{sat}(\tau) &= Sat(u(\tau), u_{max}, u_{min}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

gdzie K_p, T_d, T_i oraz K_c są nastawami bloku regulatora, T_o jest założonym czasem opóźnienia (w implementacji cyfrowej jest on równy zastosowanemu okresowi próbkowania regulatora dyskretnego: $T_o = T_p$), a funkcja $Sat(\cdot)$ wynika z poniższej definicji:

$$Sat(u(\tau), u_{max}, u_{min}) \triangleq \begin{cases} u_{max}, & \text{gdy } u(\tau) \geq u_{max}, \\ u(\tau), & \text{gdy } u_{min} < u(\tau) < u_{max}, \\ u_{min}, & \text{gdy } u(\tau) \leq u_{min}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Dyskretna implementacja bloku regulatora z korektorem wynika z zastosowania transformacji *Eulera wstecz* prowadząc do równań różnicowych przedstawionych w Dodatku C. Podczas prób doświadczalnych sygnał sterujący realizowany był wyłącznie w trybie wymuszenia napięciowego (sterowanie ma interpretację napięcia twornika wyrażoną w [V]) z modulacją jednobiegunową.

Blok B5. Blok filtru wstępnego wprowadzono w celu ułatwienia procesu strojenia regulatora PID i uzyskania pożądaných stanów przejściowych całego układu zamkniętego

⁷Równania prostych uwzględniają strefę martwą napędu i są słuszne dla prędkości wyrażonych w [Hz].

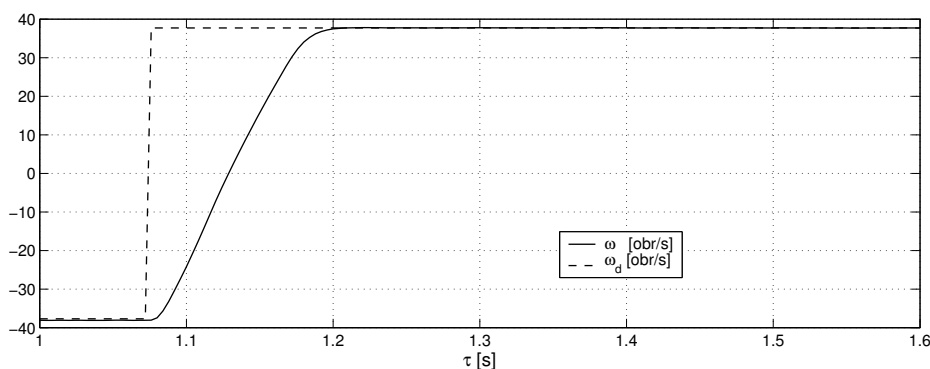
⁸Koncepcję korektora bloku całkującego oparto o dokumentację [Gro03].

(bloki znajdujące się na prawo od filtru wstępnego). Filtr ten może spełniać jedną z dwóch funkcji pomocniczych: 1) bezpośrednio eliminować wpływ zer transmitancji układu zamkniętego (wprowadzanych przez regulator PID) na stany przejściowe lub 2) stanowić model referencyjny dla całego zamkniętego układu regulacji. Pierwsza funkcja będzie zrealizowana, gdy mianownik transmitancji filtru będzie równy licznikowi transmitancji układu zamkniętego. Druga funkcja natomiast pozwala na swobodny dobór współczynników filtru zgodnie z założoną i pożądaną oscylacyjnością i czasem ustalania przebiegów przejściowych. Odtwarzanie sygnału wyjściowego filtru ω_{df} (rys. 6.4) gwarantuje bowiem zachowanie się układu regulacji dokładnie w taki sposób, jak przebiega reakcja filtru na wymuszenie zadane ω_d . W omawianej implementacji filtr wstępny spełnia funkcję modelu referencyjnego dla układu zamkniętego. Cyfrowa realizacja filtru wynika z zastosowania dyskretyzacji ciągłego modelu filtru metodą *Eulera wstecz* dając następujące równanie różnicowe:

$$\omega_{df}(n) = F_1\omega_{df}(n-1) + F_2\omega_{df}(n-2) + F_0\omega_d(n), \quad (6.6)$$

gdzie $F_1 = \frac{2a+bT_p}{a+bT_p+T_p^2}$, $F_2 = \frac{-a}{a+bT_p+T_p^2}$, $F_0 = \frac{T_p^2}{a+bT_p+T_p^2}$ są współczynnikami filtru (parametry a i b wynikają wprost z transmitancji $G_f(s)$).

Tabela 6.2 zawiera wartości parametrów związanych z blokami B1-B5, które zostały użyte podczas prób eksperymentalnych⁹. Jakość pracy układu regulacji prędkości pojedynczego napędu przy zmianie sygnału zadanego ω_d z wartości -37.7 [obr/s] na $+37.7$ [obr/s] ilustruje rys. 6.5. Uzyskaną jakość dynamiczną w układzie regulacji prędkości koła określają również: czas narastania $t_r \approx 0.080$ [s] oraz czas ustalania $t_s \approx 0.112$ [s].



Rys. 6.5: Rzeczywista odpowiedź skokowa układu regulacji prędkości pojedynczego napędu robota MMS przy zmianie sygnału zadanego ω_d z wartości -37.7 [obr/s] na $+37.7$ [obr/s].

6.3.2 Nadrzędny obwód sterowania robotem

Nadrzędny obwód sterowania platformą robota stanowi jeden ze sterowników VFO, który z jednej strony połączony jest z generatorem sygnałów referencyjnych wysokiego poziomu

⁹Użyte podczas modelowania wartości parametrów mechanicznych nie uwzględniają bezwładności oraz tarcia po stronie koła napędu ze względu na znaczną wartość współczynnika przelżenia zastosowanej przekładni ($\rho = 36 : 1$).

Tab. 6.2: Zastosowane podczas eksperymentów wartości parametrów bloków dynamicznych obwodów regulacji prędkości kół robota MMS.

Parametr	Opis	Wartość	Jednostka
F_0	współczynnik filtra wstępnego	0.1111	[-]
F_1	współczynnik filtra wstępnego	1.3333	[-]
F_2	współczynnik filtra wstępnego	-0.4444	[-]
K_p	nastawa bloku P regulatora PID	0.7	[Vs]
T_d	nastawa bloku D regulatora PID	0.007	[Vs ²]
T_i	nastawa bloku I regulatora PID	0.98	[1/V]
K_c	współczynnik korekcyjny <i>anti-windup</i> -u	0.6	[-]
u_{min}	dolne ograniczenie sygnału sterującego	-12	[V]
u_{max}	górne ograniczenie sygnału sterującego	+12	[V]
$ i_{max} $	ograniczenie prądu silnika	$0.5 I_{max} \approx 2.2$	[A]
T_p	okres pracy dyskretnego układu regulacji	0.001	[s]
K_{FF0}	współczynnik bloku wyprzedzającego	0.75	[-]
K_{FF1}	współczynnik bloku wyprzedzającego	0.231	[Vs]
T	stała czasowa bloku estymatora prędkości	0.157	[s]
J	moment bezwładności wirnika	110	[gcm ²]
R	rezystancja uzwojenia wirnika	1.1	[Ω]
k_i	stała prądowa	≈ 0.0524	[Nm/A]

(*GTR*), a z drugiej z podrzędnymi obwodami regulacji prędkości omówionymi w punkcie poprzednim. Ogólna struktura układu sterowania robotem została przedstawiona na rys. 6.6, gdzie ponadto zaznaczono takie bloki funkcjonalne, jak blok skalowania prędkości *BSP* (patrz opis dalej), napędy kół prawego i lewego N_P, N_L , estymatory prędkości silników EP_P, EP_L , regulatory obu napędów R_P, R_L (rozumiane jako odpowiednie fragmenty¹⁰ obwodów regulacji przedstawione w punkcie 6.3.1) oraz blok estymacji położenia i prędkości platformy robota *EPPR*.

Zadaniem generatora trajektorii referencyjnej jest generowanie w czasie rzeczywistym następujących sygnałów definiujących zadanie ruchu dla platformy robota:

$x_t(nT_g)$ – pozycja referencyjna w osi X układu globalnego,

$y_t(nT_g)$ – pozycja referencyjna w osi Y układu globalnego,

$\varphi_t(nT_g)$ – referencyjna orientacja platformy,

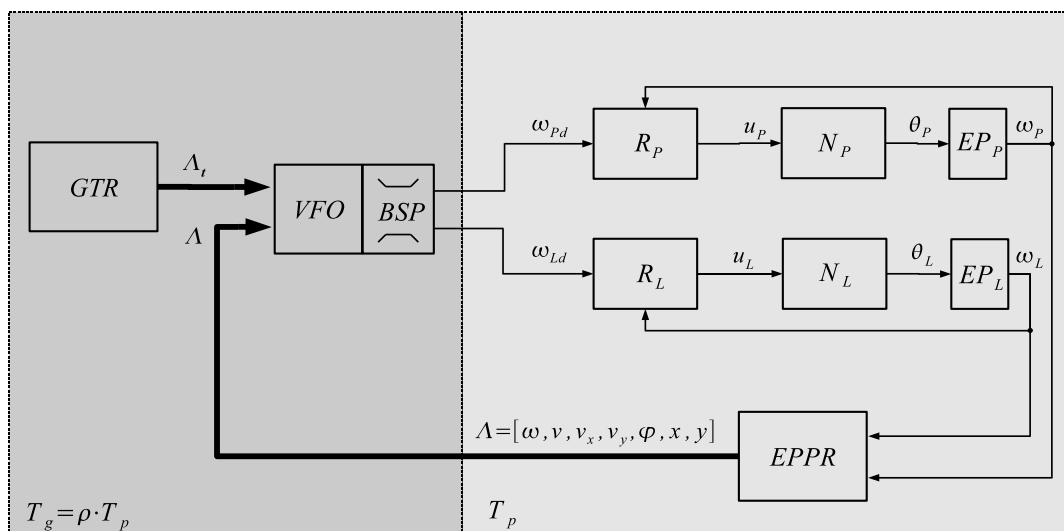
$v_t(nT_g)$ – referencyjna prędkość postępową platformy (referencyjne sterowanie popychające),

$\omega_t(nT_g)$ – referencyjna prędkość kątową platformy (referencyjne sterowanie orientujące),

$\dot{x}_t(nT_g)$ – składowa referencyjnej prędkości postępowej platformy wzdłuż osi X układu globalnego,

$\dot{y}_t(nT_g)$ – składowa referencyjnej prędkości postępowej platformy wzdłuż osi Y układu globalnego.

¹⁰Bez bloków estymacji prędkości, które zaznaczono oddzielnie na rys. 6.6.



Rys. 6.6: Ogólny schemat blokowy układu sterowania robota MMS ze sterownikiem VFO.

Proces generowania wszystkich sygnałów odbywa się w czasie dyskretnym ze stałym okresem próbkowania $T_g = \rho T_p$ równym całkowitej wielokrotności okresu T_p pracy obwodów regulacji prędkości. Podczas realizacji sterownika VFO przyjęto $\rho = 10$ tak, aby dać czas podrzędnym obwodom regulacji na realizację chwilowych prędkości napędów $\omega_{Pd}(nT_g), \omega_{Ld}(nT_g)$. Dla przyjętego okresu $T_p = 0.001$ [s] otrzymujemy okres pracy bloków *GTR* oraz *VFOReg* wynoszący $T_g = 0.01$ [s].

Zestaw sygnałów zwrotnych Λ z poziomu platformy (por. rys. 6.6) jest estymowany w bloku *EPPR* według następującego schematu wynikającego z całkowania metodą trapezów (*Tustina*):

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad \omega(n) &= \frac{2\pi\mu r}{b} [\omega_P(n) - (-\omega_L(n))], \\
 2^\circ \quad v(n) &= \frac{2\pi\mu r}{2} [\omega_P(n) + (-\omega_L(n))], \\
 3^\circ \quad \varphi(n) &= \varphi(n-1) + \frac{T_p}{2} [\omega(n) + \omega(n-1)], \\
 4^\circ \quad v_x(n) &= v(n) \cos \varphi(n), \\
 x(n) &= x(n-1) + \frac{T_p}{2} [v_x(n) + v_x(n-1)], \\
 5^\circ \quad v_y(n) &= v(n) \sin \varphi(n), \\
 y(n) &= y(n-1) + \frac{T_p}{2} [v_y(n) + v_y(n-1)].
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

gdzie zmiana znaku prędkości ω_L wynika z ułożenia silników w module DM, a wielkości v_x i v_y oznaczają składowe prędkości platformy wzdłuż odpowiednich osi układu globalnego. Ze względu na konieczność numerycznego całkowania rzeczywistych sygnałów prędkościowych, blok *EPPR* pracuje z częstotliwością dziesięciokrotnie większą od częstotliwości pracy nadrzędnego obwodu regulacji. W ten sposób ogranicza się błędy operacji całkowania, a co za tym idzie tzw. dryfowanie wyników obliczeń odometrii.

Blok *VFO* oblicza zgodnie z algorytmem VFO chwilowe wartości żądanych prędkości platformy w postaci próbek sterowania popychającego $u_2(n)$ oraz sterowania orientującego $u_1(n)$. Ze względu na występujące w praktyce ograniczenia prędkości zastosowanych napędów, a tym samym kół robota (por. tab. 6.1), nie wszystkie wartości sterowań $u_1(n)$ oraz $u_2(n)$ będą realizowalne w układzie rzeczywistym. Dodatkowo ze względu na różni-

cowy sposób realizacji ruchu rozważanego robota, maksymalne realizowalne wartości sygnałów $u_1(n)$ i $u_2(n)$ są ze sobą ściśle związane [Mic04]. Aby nie przekroczyć tych wartości podczas realizacji zadania sterowania, zastosowano procedurę skalowania prędkości przedstawioną między innymi w pracach [KMMP06, DMM01] i realizowaną w bloku *BSP* zaznaczonym na rys. 6.6. Ostatecznie zatem prędkości platformy $u_1(n)$ oraz $u_2(n)$ przeliczane są na żądane prędkości napędów kół robota zgodnie z poniższym schematem:

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad \omega_{Pc}(n) &= \frac{1}{r}[u_2(n) + \frac{b}{2}u_1(n)], \\
2^\circ \quad \omega_{Lc}(n) &= \frac{1}{r}[u_2(n) - \frac{b}{2}u_1(n)], \\
3^\circ \quad s &= \max\left\{\frac{|\omega_{Pc}|}{\omega_{kmax}}, \frac{|\omega_{Lc}|}{\omega_{kmax}}\right\}, \\
4^\circ \quad \omega_{Pd}(n), \omega_{Ld}(n) &= \begin{cases} \chi\omega_{Pc}(n), & -\chi\omega_{Lc}(n), & \text{jeśli } s \leq 1, \\ \frac{\chi}{s}\omega_{Pc}(n), & -\frac{\chi}{s}\omega_{Lc}(n), & \text{jeśli } s > 1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

gdzie $\chi = 1/(2\pi\mu)$, wielkość ω_{kmax} jest wyrażona w [rad/s], a zmiana znaku prędkości dla napędu lewego wynika ponownie z umiejscowienia silników w module DM¹¹.

6.3.3 Wybrane zagadnienia implementacji algorytmów VFO

Z punktu widzenia uzyskiwanej jakości działania układów ze sterownikami VFO warto zwrócić uwagę na dwie istotne kwestie związane z implementacją proponowanych w rozdziale 3 algorytmów.

Pierwsza kwestia dotyczy sposobu obliczania pomocniczej zmiennej orientacji φ_a . Istnieją dwa alternatywne sposoby realizacji tego zadania. Pierwszy z nich polega na całkowaniu sygnału prędkości $\dot{\varphi}_a$ zgodnie z formułą:

$$\varphi_a(\tau) = \varphi_a(0) + \int_0^\tau \dot{\varphi}_a(\xi) d\xi \stackrel{(3.13)}{=} \varphi_a(0) + \int_0^\tau \frac{\dot{h}_3 h_2 - h_3 \dot{h}_2}{h_2^2 + h_3^2} d\xi,$$

gdzie $\varphi_a(0) = \text{Atan2}(sgn(k)h_3(0), sgn(k)h_2(0))$. Numeryczna realizacja procedury całkowania powoduje jednak narastanie błędów obliczeniowych w miarę upływu czasu i w efekcie prowadzi do niepożądanych zjawisk takich, jak narastanie błędów śledzenia w przypadku realizacji zadania śledzenia trajektorii zmiennych w czasie. Z tego względu w realizacji praktycznej należy raczej unikać wyżej wspomnianej metody. Zadowolające rezultaty otrzymuje się natomiast stosując drugi sposób obliczania sygnału φ_a polegający na uciążliwym pomiarze pomocniczego kąta orientacji poprzez realizację funkcji $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$. Działanie tej funkcji opisano w punkcie 3.1, a sposób realizacji w Dodatku A.1. Implementacja praktyczna wykorzystuje funkcję $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$.

Druga kwestia związana jest ściśle z zastosowaną procedurą skalowania prędkości przedstawioną w punkcie poprzednim, a wynikającą z występowania praktycznych ograniczeń prędkości rzeczywistych napędów robota. Jakkolwiek w niniejszej pracy nie zamieszczono teoretycznej analizy jakości sterowania z uwzględnieniem ograniczeń sygnałów sterujących, to uzyskane wyniki działania układu (sprawdzone symulacyjnie w [KMMP06]) z zaproponowaną procedurą (6.8) wydają się być obiecujące. Jedyną problematyczną kwestią staje się sposób określania sygnałów \dot{x} oraz \dot{y} występujących pośrednio w równaniu (3.13) poprzez definicje elementów h_2 i h_3 . Sygnały \dot{x} oraz \dot{y} stanowią składowe

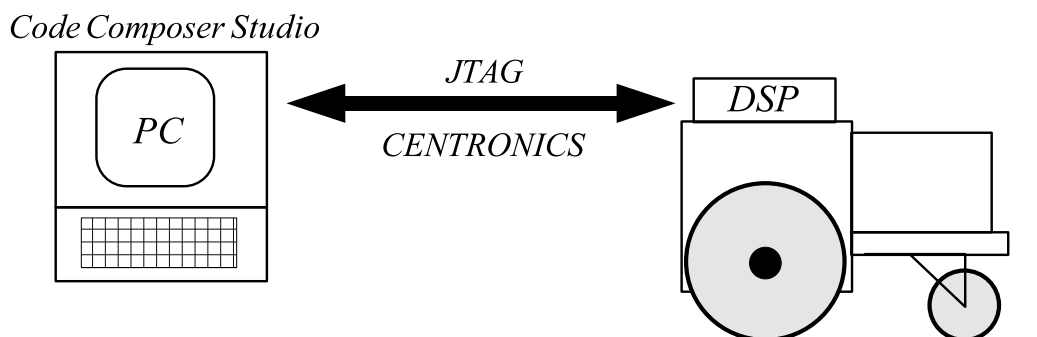
¹¹Prędkości $\omega_{Pd}(n)$ i $\omega_{Ld}(n)$ obliczone w punkcie 4° są wyrażone w [Hz].

rzeczywistych prędkości platformy i zgodnie z tą interpretacją winny wynikać z bieżących obliczeń prędkości realizowanych przez blok *EPPR* (rys. 6.6). Przeprowadzone próby doświadczalne wykazały jednak, iż lepsze jakościowo wyniki uzyskuje się, gdy sygnały te są obliczane jako:

$$\dot{x} = u_2 \cos \varphi, \quad \dot{y} = u_2 \sin \varphi, \quad (6.9)$$

gdzie u_2 stanowi bieżącą wartość obliczonego sterowania popychającego w sterowniku VFO¹². Propozycję (6.9) można próbować intuicyjnie interpretować jako swego rodzaju *predykcję* składowych prędkości \dot{x}, \dot{y} dla przypadku, gdyby obliczona wartość sterowania popychającego u_2 została zrealizowana przez układ wykonawczy robota. Poprawa jakości wynikająca z zastosowania propozycji (6.9) polega na efektywniejszej realizacji zadania orientowania (pomocniczy błąd orientacji e_a zmierza do zera bez przeregulowania), które odgrywa kluczową rolę w metodzie VFO. Zastosowanie propozycji (6.9) pozwoliło również zauważyć mniejsze odchylenia sygnałów błędów śledzenia (po zaniknięciu składowych przejściowych) w przypadku praktycznej realizacji zadań odtwarzania trajektorii zmiennych w czasie. Poruszona tutaj kwestia wymaga jednak dalszych badań, szczególnie od strony teoretycznej.

Na koniec należy zaznaczyć, iż wszystkie obliczenia związane z zaprezentowanym układem sterowania robota MMS wraz z generacją sygnałów referencyjnych były realizowane na pokładzie robota przez jednostkę obliczeniową procesora TMS320F2812 w arytmetyce stałoprzecinkowej z wykorzystaniem funkcji obliczeniowych biblioteki *IQmath* [IQ:02]. Zatem można powiedzieć, iż robot jest obliczeniowo autonomiczny. Stanowisko doświad-



Rys. 6.7: Schemat połączenia karty DSP robota z komputerem PC zastosowany na stanowisku doświadczalnym.

czalne wymagało jednak połączenia karty DSP robota MMS z komputerem PC (rys. 6.7) w celu wygodnego przesyłu parametrów dla generatora trajektorii referencyjnych, wartości parametrów sterownika VFO oraz odbioru danych pomiarowych i wyników obliczeń w celu ich późniejszej wizualizacji¹³. Obsługę komunikacji i dostęp do zasobów procesora sygnałowego znajdującego się na pokładzie robota zrealizowano z poziomu programu Code Composer Studio (Texas Instruments).

¹²Taką strategię przyjęto także w badaniach symulacyjnych, których wyniki zawarto w pracy [KMMP06].

¹³Przesył ten miał charakter wsadowy i podczas realizacji zadania sterowania żadna komunikacja pomiędzy komputerem a jednostką sterującą na pokładzie robota nie była wymagana.

Wyniki badań eksperymentalnych

Niniejszy rozdział prezentuje warunki realizacji oraz wyniki doświadczeń przeprowadzonych na platformie mobilnej MMS dla sterowników VFO zaproponowanych w punkcie 3.1. Przedstawione rezultaty opatrzone krótkim końcowym komentarzem. Wszystkie eksperymenty zrealizowano z jednym i tym samym zestawem wartości parametrów algorytmów VFO, aby pokazać prostotę syntezy rozważanych sterowników oraz brak istotnej wrażliwości algorytmów VFO (z punktu widzenia jakości sterowania) na zmiany tych parametrów. Użyte wartości zebrano w tabeli 7.1.

Tab. 7.1: Wartości współczynników sterowników VFO zastosowane podczas prób doświadczalnych.

Parametr	Opis	Wartość	Jednostka
k_1	współczynnik błędu orientacji platformy	10	[1/s]
k_p	współczynnik błędów pozycji platformy	5	[1/s]
η	pomocniczy parametr projektowy	3	[1/s]

W kolejnych dwóch punktach zaprezentowano wyniki pięciu eksperymentów (dwa dla zadania śledzenia i trzy dla zadania stabilizacji) prezentujących różne praktyczne aspekty implementacji zaproponowanych algorytmów VFO.

7.1 Zadanie śledzenia trajektorii

Jakość sterowania dla zadania śledzenia prezentują wyniki uzyskane dla dwóch rodzajów trajektorii zmiennych w czasie: trajektorii eliptycznej oraz trajektorii ósemkowej. Wybór tych właśnie trajektorii został podyktowany wyższym stopniem trudności ich realizacji w porównaniu do trajektorii prostoliniowych czy kołowych¹. W obu przypadkach zaimplementowano równania sterownika VFO przedstawione w punkcie 3.1.2 (szczegóły implementacji zawarto w punkcie 6.3).

¹Trajektoria prostoliniowa wymaga jedynie niezerowej i stałej prędkości postępowej platformy (prędkość kątowa jest tożsamościowo równa zero), a trajektoria kołowa – stałej i niezerowej prędkości postępowej i kątowej. Obie wybrane trajektorie (eliptyczna i ósemkowa) wymagają realizacji obu prędkości (postępowej i kątowej) jako sygnałów zmiennych w czasie.

Eksperyment E1 – trajektoria eliptyczna. Dyskretne sygnały referencyjne dla platformy mobilnej obliczano bezpośrednio na podstawie następujących równań określonych w ciągłej dziedzinie czasu:

$$\begin{aligned}
x_t(\tau) &\triangleq x_t(0) + A_x \cos \Omega\tau, \\
y_t(\tau) &\triangleq y_t(0) + A_y \sin \Omega\tau, \\
\dot{x}_t(\tau) \equiv v_{xt}(\tau) &= -\Omega A_x \sin \Omega\tau, \\
\dot{y}_t(\tau) \equiv v_{yt}(\tau) &= \Omega A_y \cos \Omega\tau, \\
\ddot{x}_t(\tau) \equiv a_{xt}(\tau) &= -\Omega^2 A_x \cos \Omega\tau, \\
\ddot{y}_t(\tau) \equiv a_{yt}(\tau) &= -\Omega^2 A_y \sin \Omega\tau, \\
v_t(\tau) &= \operatorname{sgn}(v_t) \sqrt{v_{xt}^2(\tau) + v_{yt}^2(\tau)}, \\
\omega_t(\tau) &= \frac{a_{yt}(\tau)v_{xt}(\tau) - a_{xt}(\tau)v_{yt}(\tau)}{v_t^2(\tau)}, \\
\varphi_t(\tau) &= \operatorname{Atan2c}(\operatorname{sgn}(v_t)v_{yt}(\tau), \operatorname{sgn}(v_t)v_{xt}(\tau)),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

przy czym postać prędkości $\omega_t(\tau)$ wynika ze zróźniczkowania sygnału $\varphi_t(\tau)$. Wartości poszczególnych parametrów trajektorii referencyjnej zebrano w tabeli 7.2. Podczas re-

Tab. 7.2: Zestaw wartości parametrów referencyjnej trajektorii eliptycznej.

Parametr	Wartość	Jednostka
A_x	0.4	[m]
A_y	0.7	[m]
Ω	0.4	[rad/s]
$x_t(0)$	0	[m]
$y_t(0)$	0	[m]
$\operatorname{sgn}(v_t)$	+1	[-]

Tab. 7.3: Zestaw wartości parametrów referencyjnej trajektorii ósemkowej.

Parametr	Wartość	Jednostka
A	0.4	[m]
Ω_x	0.3	[rad/s]
Ω_y	0.6	[rad/s]
$x_t(0)$	0	[m]
$y_t(0)$	0	[m]
$\operatorname{sgn}(v_t)$	+1	[-]

alizacji zadania maksymalne prędkości kół platformy zostały ograniczone do wartości $\omega_{kmax} = 12.5[\text{rad/s}]$ (por. procedurę skalowania prędkości w punkcie 6.3.2). Przyjęto następujące warunki początkowe platformy: $\mathbf{q}(0) = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T$. Uzyskane wyniki ilustrują rys. 7.1-7.7 (próbki sygnałów z wykresów zostały zebrane z kwantem $\Delta\tau = 0.04[\text{s}]$).

Eksperyment E2 – trajektoria ósemkowa. Dyskretne sygnały referencyjne dla platformy mobilnej obliczano bezpośrednio na podstawie następujących równań określonych w ciągłej dziedzinie czasu:

$$\begin{aligned}
x_t(\tau) &\triangleq x_t(0) + A \sin \Omega_x \tau, \\
y_t(\tau) &\triangleq y_t(0) + A \sin \Omega_y \tau, \\
\dot{x}_t(\tau) \equiv v_{xt}(\tau) &= \Omega_x A \cos \Omega_x \tau, \\
\dot{y}_t(\tau) \equiv v_{yt}(\tau) &= \Omega_y A \cos \Omega_y \tau, \\
\ddot{x}_t(\tau) \equiv a_{xt}(\tau) &= -\Omega_x^2 A \sin \Omega_x \tau, \\
\ddot{y}_t(\tau) \equiv a_{yt}(\tau) &= -\Omega_y^2 A \sin \Omega_y \tau,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

przy czym definicje sygnałów $v_t(\tau)$, $\omega_t(\tau)$ oraz $\varphi_t(\tau)$ przyjęto analogicznie jak w (7.1). Wartości poszczególnych parametrów trajektorii referencyjnej zebrano w tabeli 7.3. Pod-

czas realizacji zadania maksymalne prędkości kół platformy zostały ograniczone do wartości $\omega_{kmax} = 12.5[\text{rad/s}]$ (por. procedurę skalowania prędkości w punkcie 6.3.2). Przyjęto następujące warunki początkowe platformy: $\mathbf{q}(0) = [\pi \ -0.2 \ -0.3]^T$. Uzyskane wyniki ilustrują rys. 7.8-7.14 (próbki sygnałów z wykresów zostały zebrane z kwantem $\Delta\tau = 0.06[\text{s}]$).

7.2 Zadanie stabilizacji

Jakość sterowania dla zadania stabilizacji prezentują wyniki uzyskane dla trzech zadań szczegółowych: parkowania równoległego w otoczenie ϵ punktu zerowego, parkowania tyłem w otoczenie ϵ punktu zerowego oraz parkowania przodem z dojazdem do punktu zerowego ($\epsilon = 0$). We wszystkich przypadkach zaimplementowano równania sterownika VFO przedstawione w punkcie 3.1.3 (szczegóły implementacji zawarto w punkcie 6.3), przy czym w dwóch pierwszych wykorzystano także modyfikację (3.74). Eksperyment parkowania do punktu zerowego ($\epsilon = 0$) ukazuje problem dużej wrażliwości nieciągłych *prawie stabilizatorów* na błędy obliczeń i szum pomiarowy w punkcie stabilizacji (problem znany z literatury przedmiotu).

Eksperyment E3 – parkowanie równoległe ($\epsilon > 0$). Zadanie parkowania równoległego zrealizowano dla zerowego punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$ i dla warunków początkowych platformy $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 1.5]^T$. Przyjęto ponadto ograniczenie maksymalnej wartości prędkości kół platformy jako $\omega_{kmax} = 12.5[\text{rad/s}]$ (procedura skalowania prędkości z punktu 6.3.2) oraz promień otoczenia pozycji referencyjnej $\epsilon = 0.005[\text{m}]$. Uzyskane wyniki ilustrują rys. 7.15-7.21 (próbki sygnałów z wykresów zostały zebrane z kwantem $\Delta\tau = 0.02[\text{s}]$).

Eksperyment E4 – parkowanie tyłem ($\epsilon > 0$). Zadanie parkowania w strategii ruchu *do tyłu* zrealizowano dla zerowego punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$ i dla warunków początkowych platformy $\mathbf{q}(0) = [-0.5 \ 0.5 \ 0.6]^T$. Przyjęto ponadto ograniczenie maksymalnej wartości prędkości kół platformy jako $\omega_{kmax} = 6.66[\text{rad/s}]$ (procedura skalowania prędkości z punktu 6.3.2) oraz promień otoczenia pozycji referencyjnej $\epsilon = 0.005[\text{m}]$. Uzyskane wyniki ilustrują rys. 7.22-7.29 (próbki sygnałów z wykresów zostały zebrane z kwantem $\Delta\tau = 0.02[\text{s}]$).

Eksperyment E5 – parkowanie z dojazdem do punktu ($\epsilon = 0$). W tym przypadku zadanie parkowania zrealizowano dla zerowego punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t \triangleq \mathbf{0}$ i dla warunków początkowych platformy $\mathbf{q}(0) = [\pi/2 \ 0 \ -0.5]^T$. Przyjęto ponadto ograniczenie maksymalnej wartości prędkości kół platformy jako $\omega_{kmax} = 6.66[\text{rad/s}]$ (procedura skalowania prędkości z punktu 6.3.2) oraz zerowy promień otoczenia pozycji referencyjnej $\epsilon = 0$. Uzyskane wyniki ilustrują rys. 7.30-7.37 (próbki sygnałów z wykresów zostały zebrane z kwantem $\Delta\tau = 0.02[\text{s}]$).

7.3 Komentarze i podsumowanie

Wstępna analiza wyników doświadczalnych zaprezentowanych w poprzednim punkcie nasywa kilka podstawowych wniosków.

Uzyskane błędy śledzenia pozycji dla obu rozważanych trajektorii znajdują się przeważnie na poziomie $10^{-4} \div 10^{-3}$ [m], a błędy śledzenia orientacji na poziomie $10^{-3} \div 10^{-2}$ [rad]. Błędy stabilizacji natomiast mieszczą się w założonym obszarze ϵ . Otrzymane wyniki mogą stanowić wystarczającą dokładność w wielu zastosowaniach praktycznych. Pojawiające się błędy śledzenia mogą natomiast wynikać z ujawnienia się dynamiki platformy robota oraz dynamiki napędów, które nie zostały wprost uwzględnione na poziomie sterownika nadrzędnego VFO, a także z błędów obliczeń numerycznych² i szumu pomiarowego sygnałów zwrotnych.

Warto zaznaczyć, iż wszystkie obliczenia konieczne do realizacji zadań sterowania zostały zaimplementowane i były realizowane w czasie rzeczywistym na pokładzie robota. Świadczyć to może o względnie niewielkiej złożoności obliczeniowej proponowanych algorytmów VFO.

Uwzględnienie ograniczeń sygnałów prędkościowych kół robota poprzez wprowadzenie procedury skalowania prędkości uchroniło system przed istotnym pogorszeniem jakości sterowania wynikającym z osiągnięcia nasyczeń tych sygnałów. Jedynym w zasadzie skutkiem ubocznym zjawiska nasycenia jest obecność przeregulowań w przebiegu pomocniczego sygnału błędu orientacji $e_a(\tau)$. W pracy [KMMP06] pokazano, iż zastosowanie procedury skalowania prędkości (6.8) podczas realizacji zadania stabilizacji zapewnia zachowanie kształtu ścieżki kreślonej przez platformę robota na płaszczyźnie (x, y) (w porównaniu ze ścieżką uzyskaną przy braku ograniczeń). Kwestia jakości sterowania w układzie z ograniczeniami wymaga jednak jeszcze dalszych analiz teoretycznych.

Istotnym z praktycznego punktu widzenia jest brak odporności układu zamkniętego zaobserwowany w przypadku realizacji zadania stabilizacji z zerowym otoczeniem ϵ . Jest to cecha charakterystyczna dla całej rodziny sterowników wykazujących nieciągłość w punkcie stabilizacji. Powiększenie parametru ϵ powoduje jednak ograniczenie bądź wyeliminowanie tego niekorzystnego zjawiska, kosztem pogorszenia precyzji realizacji pozycji referencyjnej (orientacja podlega stabilizacji asymptotycznej także wewnątrz obszaru ϵ). Kwestią otwartą nadal pozostaje dobór wielkości obszaru ϵ oraz możliwość pojawienia się efektu częstych przełączeń sygnałów sterujących na granicy tego obszaru.

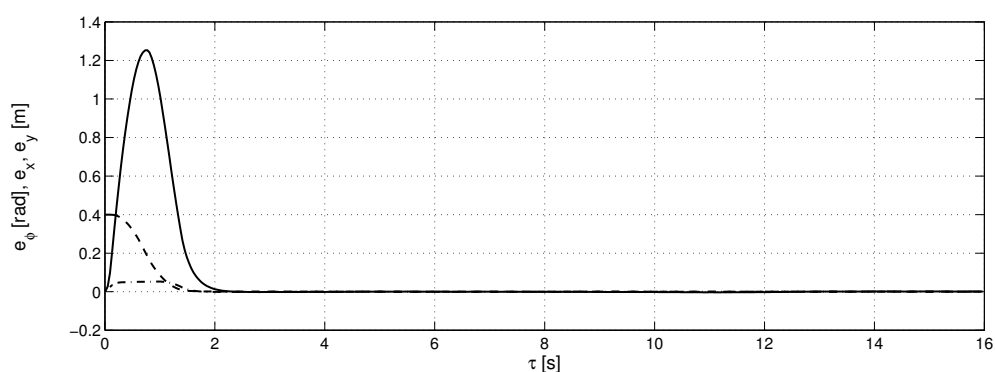
Wszystkie opisane eksperymenty zostały przeprowadzone dla tych samych wartości nastaw sterowników VFO. Fakt ten ma istotne znaczenie praktyczne, gdyż świadczy o prostocie syntezy sterowników VFO niezależnie od rodzaju realizowanego zadania i warunków początkowych systemu. Nie oznacza to oczywiście, iż zaproponowany zestaw wartości parametrów był w jakimkolwiek sensie optymalny. Generalnie, realizacja konkretnego zadania winna być poprzedzona procedurą doboru tych wartości w celu optymalizacji jakości sterowania (w sensie przyjętego kryterium).

Wszystkie wspomniane wyżej zagadnienia mogą nadal stanowić źródło ciekawych i bardziej szczegółowych badań.

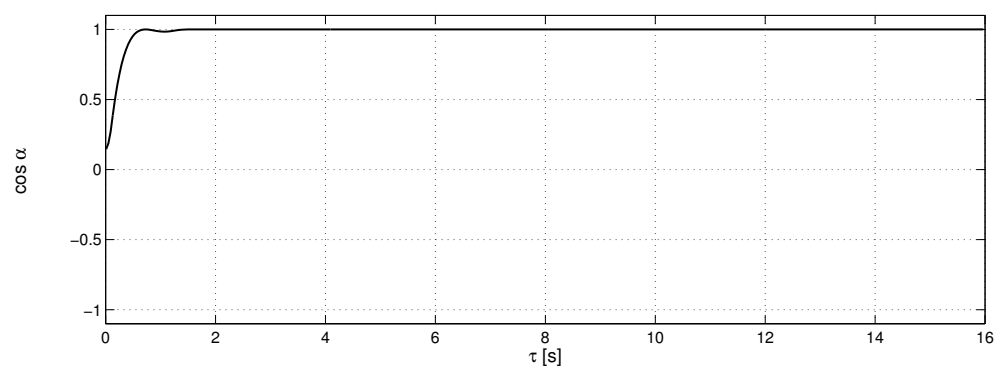
Podsumowując rozdział 7 można stwierdzić, iż uzyskane wyniki doświadczalne potwier-

²Ze względu na stałoprzecinkową realizację obliczeń, precyzja wyników była ograniczona.

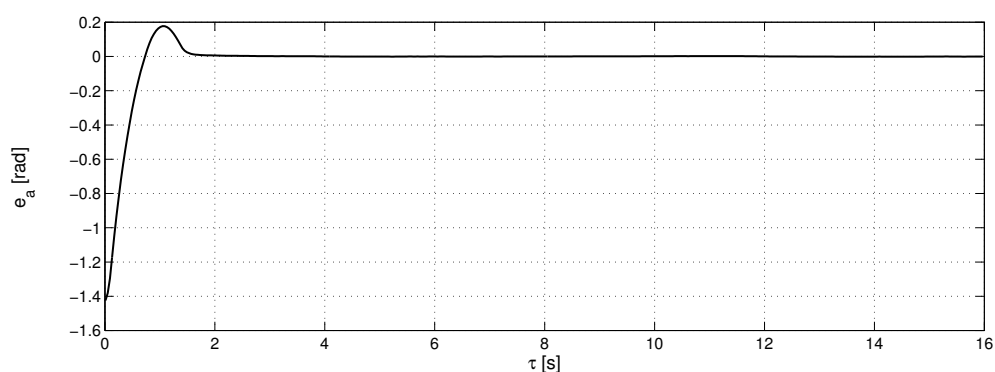
dzają efektywność zaproponowanej metody sterowania VFO w obu przypadkach realizowanych zadań sterowania: śledzenia trajektorii i stabilizacji w otoczeniu punktu.



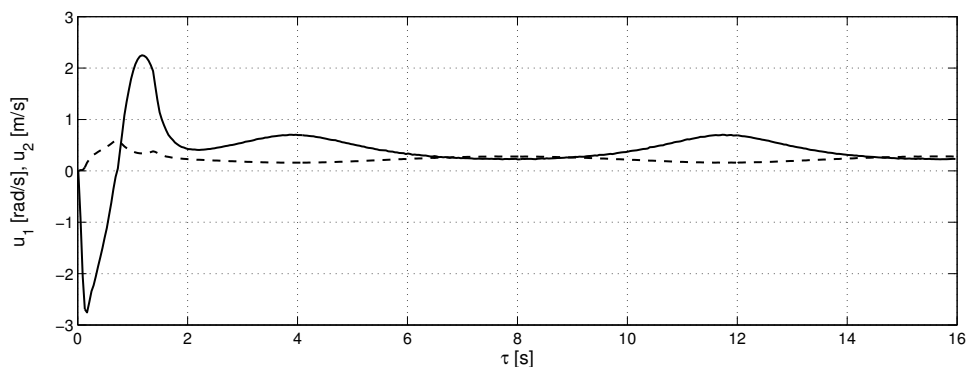
Rys. 7.1: Eksperyment E1 – błędy śledzenia: e_ϕ (—), e_x (---), e_y (-.-).



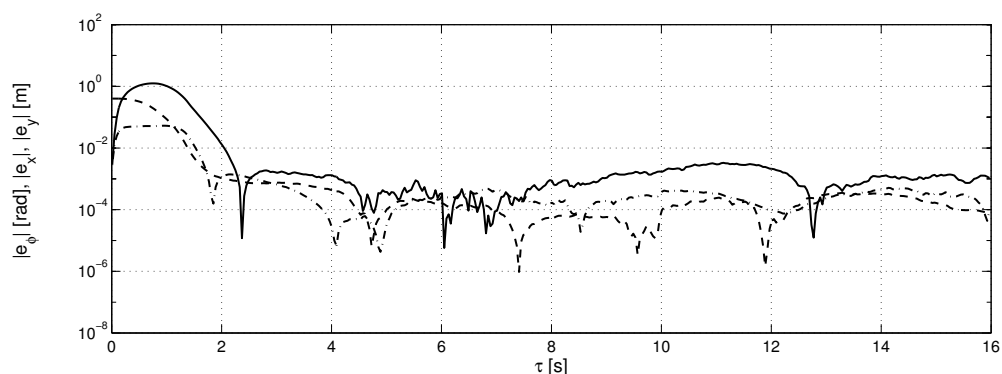
Rys. 7.2: Eksperyment E1 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



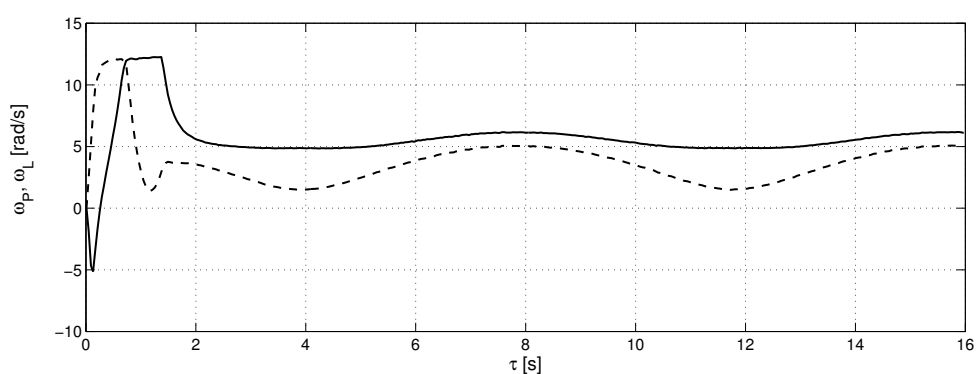
Rys. 7.3: Eksperyment E1 – pomocniczy błąd orientacji e_a .



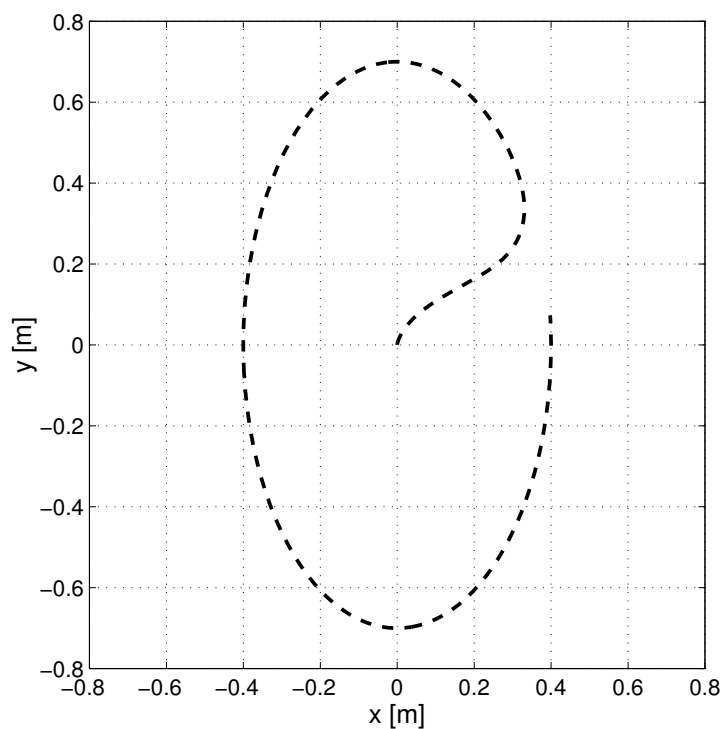
Rys. 7.4: Eksperyment E1 – zrealizowane sterowanie orientujące u_1 (—) i popychające u_2 (---) (jako rzeczywiste prędkości platformy ω oraz v).



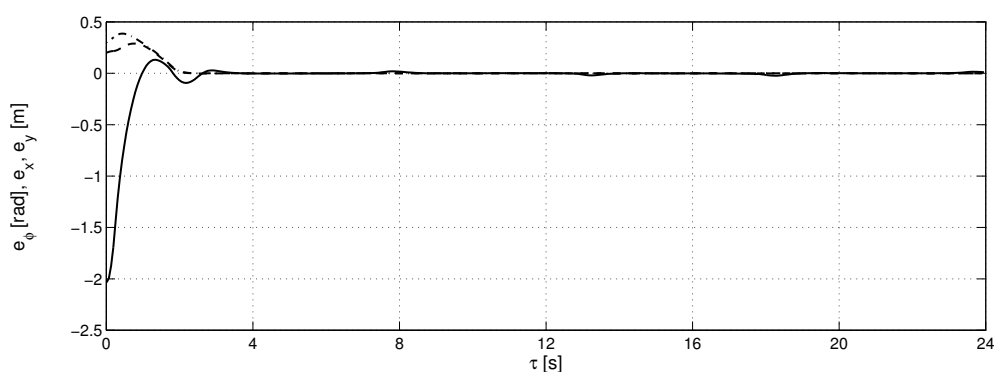
Rys. 7.5: Eksperyment E1 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_\varphi|$ (-), $|e_x|$ (- -), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



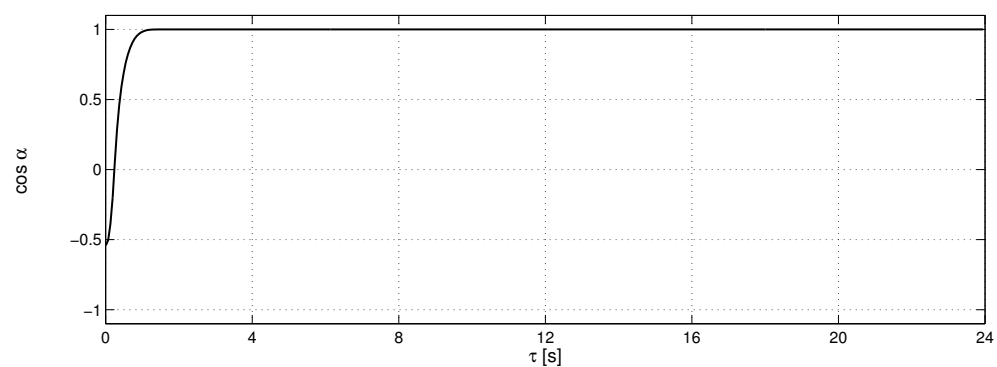
Rys. 7.6: Eksperyment E1 – prędkości kół robota: ω_P (-), ω_L (- -).



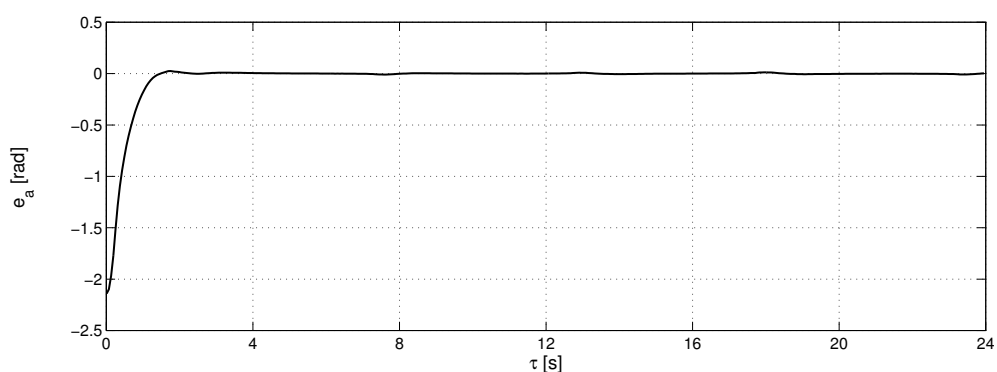
Rys. 7.7: Eksperyment E1 – ścieżka geometryczna kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota.



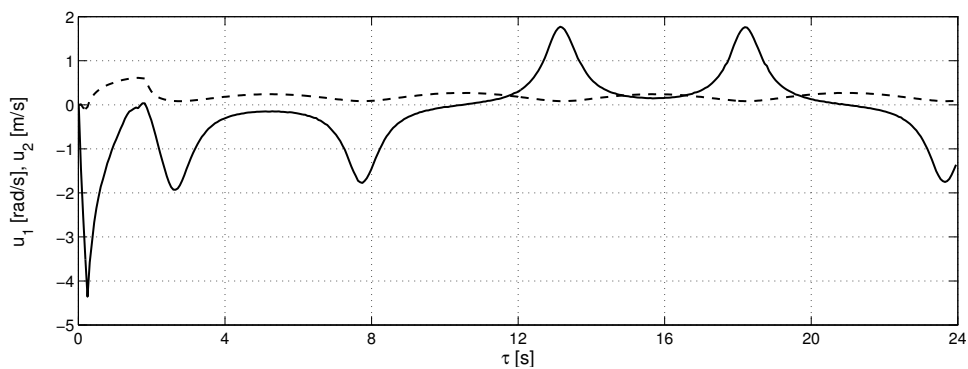
Rys. 7.8: Eksperyment E2 – błędy śledzenia: e_ϕ (—), e_x (---), e_y (-.-).



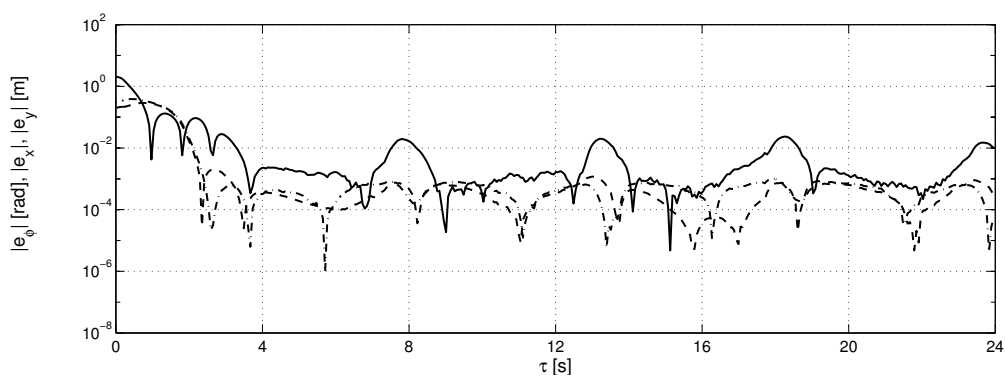
Rys. 7.9: Eksperyment E2 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



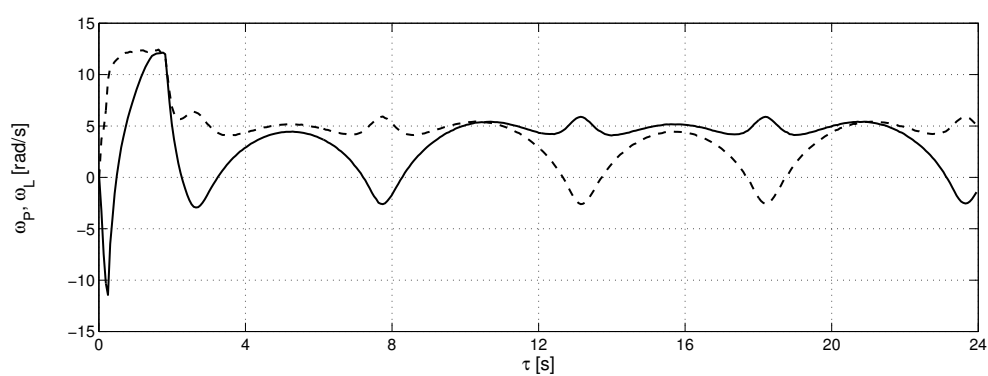
Rys. 7.10: Eksperyment E2 – pomocniczy bład orientacji e_a .



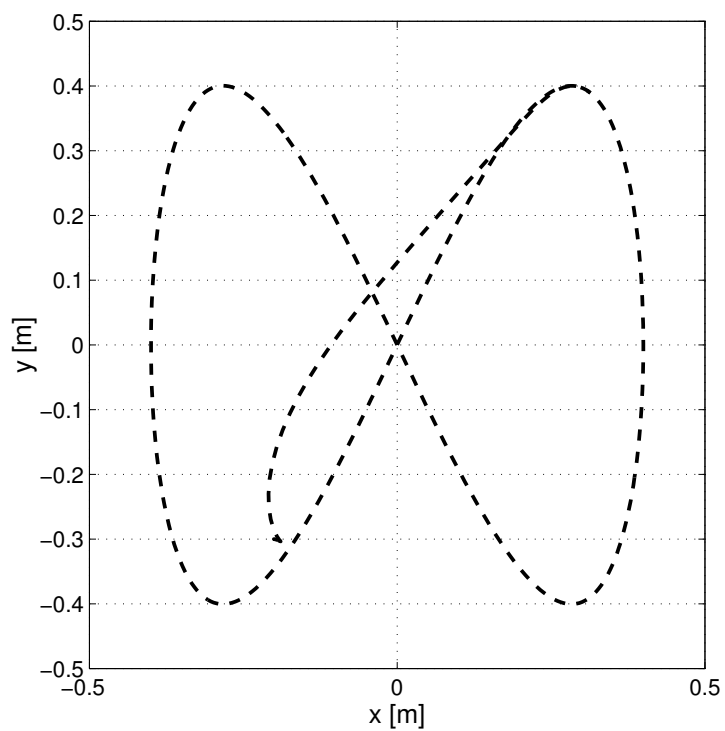
Rys. 7.11: Eksperyment E2 – zrealizowane sterowanie orientujące u_1 (—) i popychające u_2 (---) (jako rzeczywiste prędkości platformy ω oraz v).



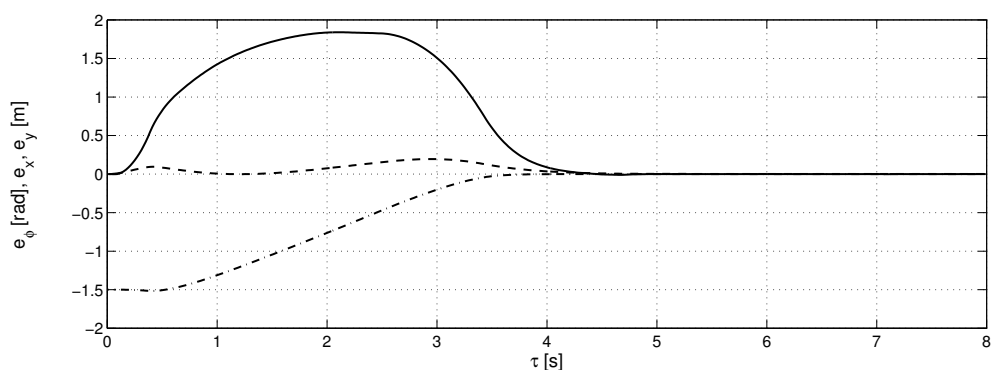
Rys. 7.12: Eksperyment E2 – bezwzględne wartości błędów śledzenia: $|e_\phi|$ (-), $|e_x|$ (- -), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



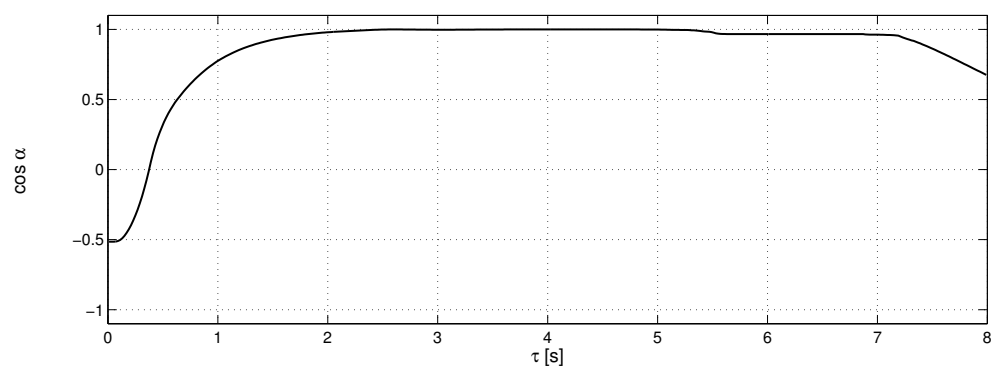
Rys. 7.13: Eksperyment E2 – prędkości kół robota: ω_P (-), ω_L (- -).



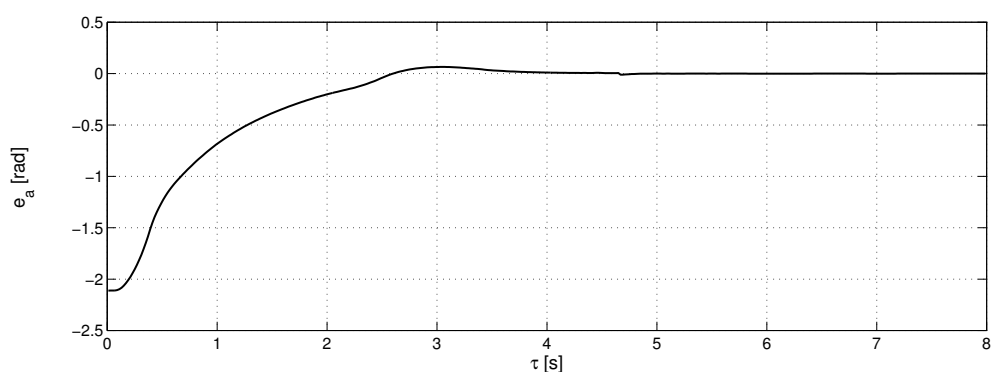
Rys. 7.14: Eksperyment E2 – ścieżka geometryczna kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota.



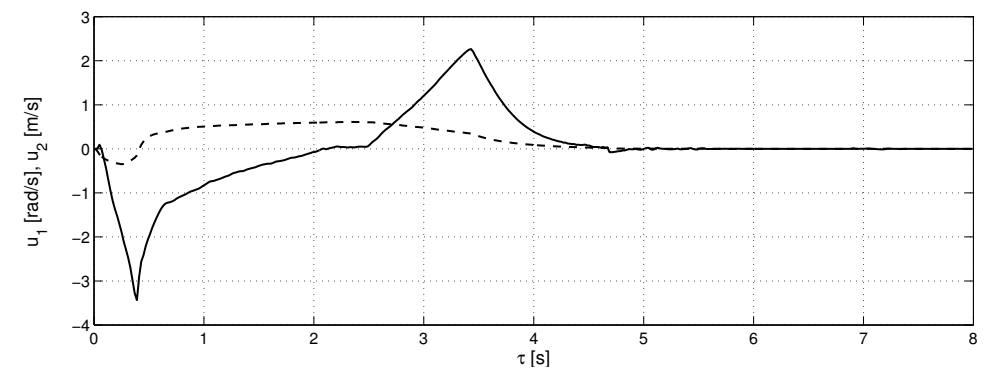
Rys. 7.15: Eksperyment E3 – błędy stabilizacji: e_φ (-), e_x (- -), e_y (-.-).



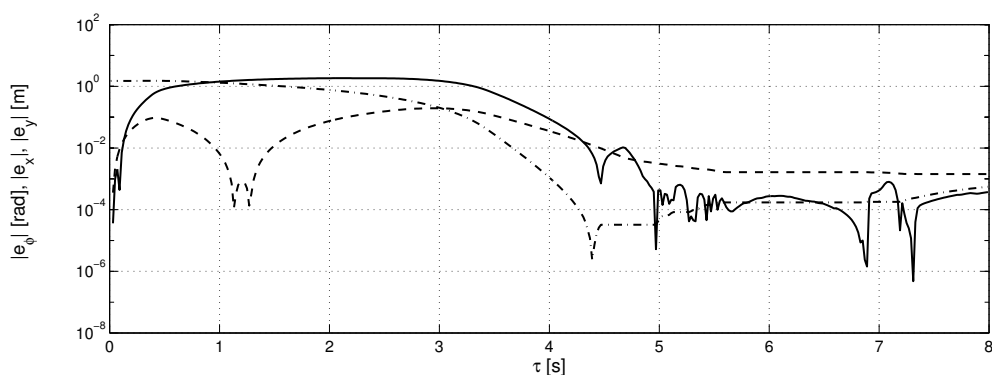
Rys. 7.16: Eksperyment E3 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



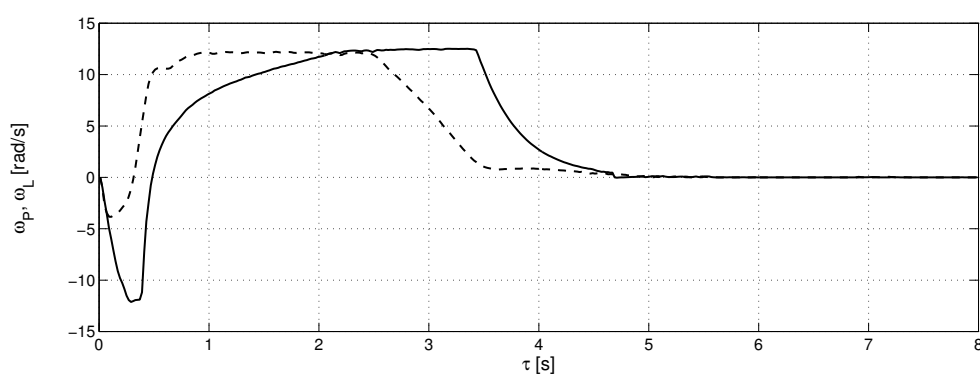
Rys. 7.17: Eksperyment E3 – pomocniczy bład orientacji e_a .



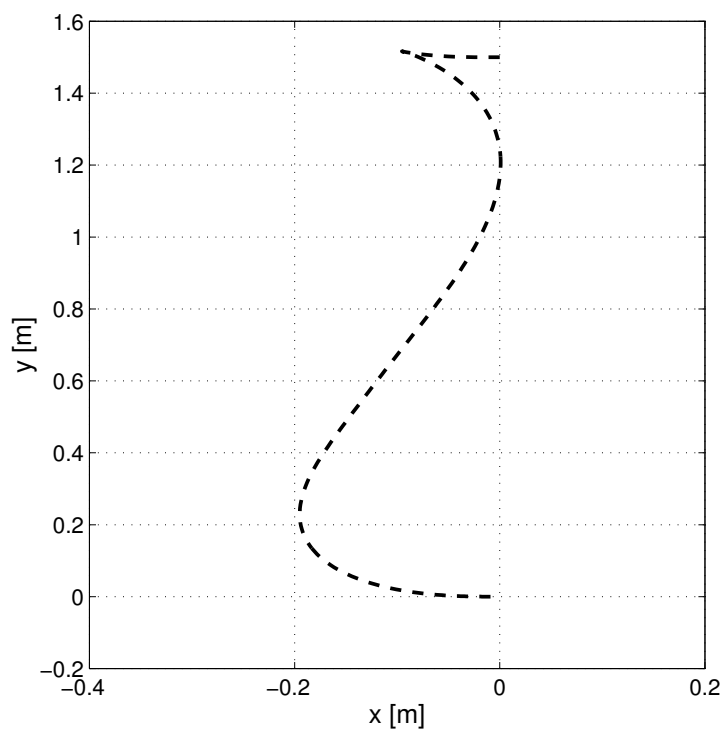
Rys. 7.18: Eksperyment E3 – zrealizowane sterowanie orientujące u_1 (-) i popychające u_2 (- -) (jako rzeczywiste prędkości platformy ω oraz v).



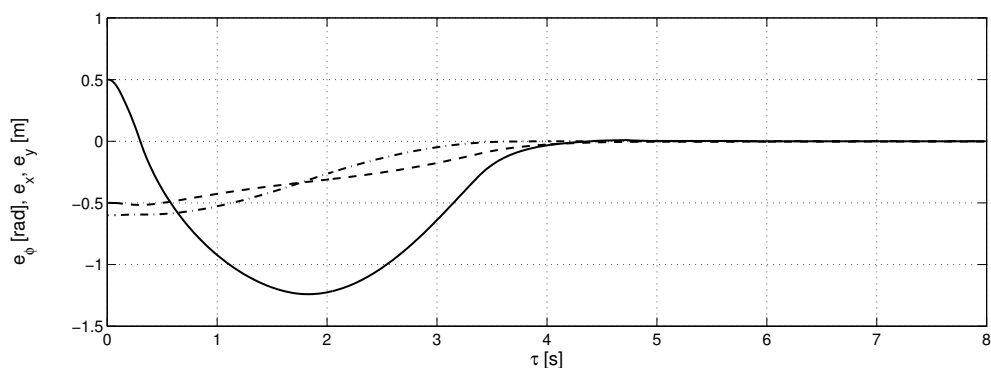
Rys. 7.19: Eksperyment E3 – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_\varphi|$ (-), $|e_x|$ (- -), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



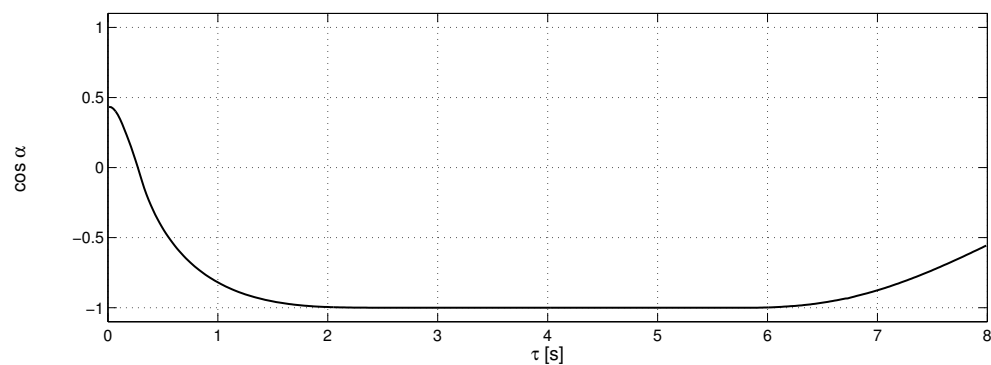
Rys. 7.20: Eksperyment E3 – prędkości kół robota: ω_P (-), ω_L (- -).



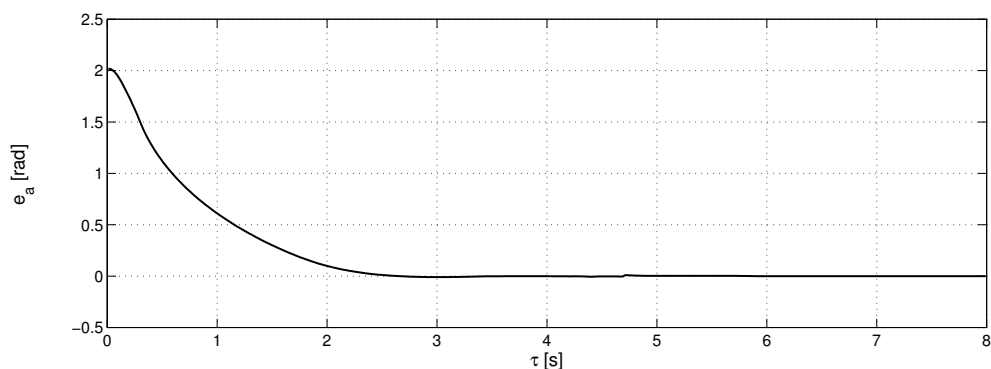
Rys. 7.21: Eksperyment E3 – ścieżka geometryczna kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota.



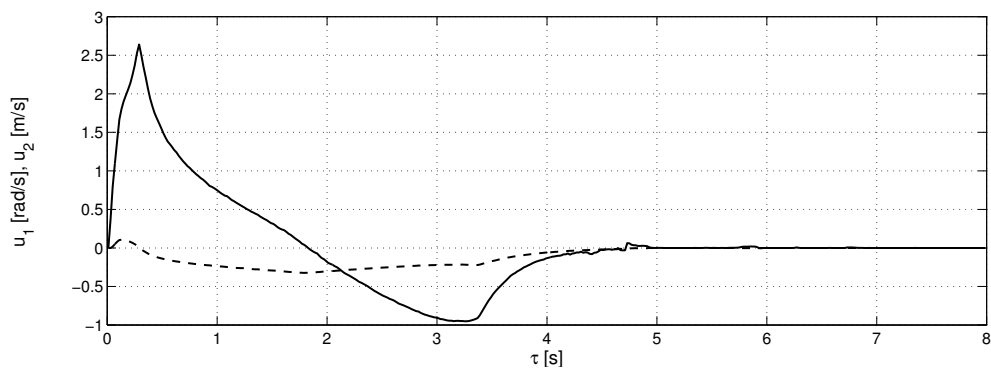
Rys. 7.22: Eksperyment E4 – błędy stabilizacji: e_ϕ (—), e_x (---), e_y (-.-).



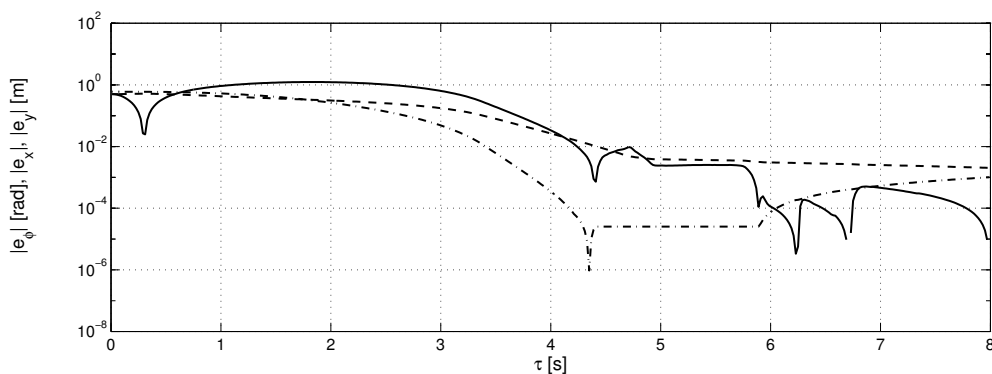
Rys. 7.23: Eksperyment E4 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



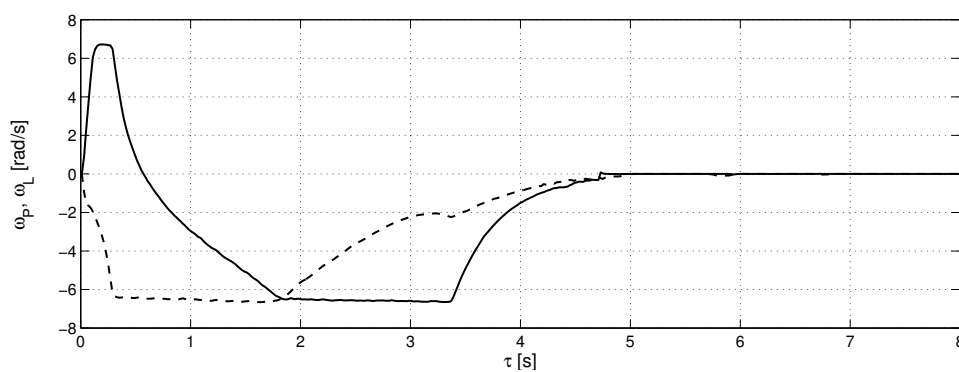
Rys. 7.24: Eksperyment E4 – pomocniczy bład orientacji e_a .



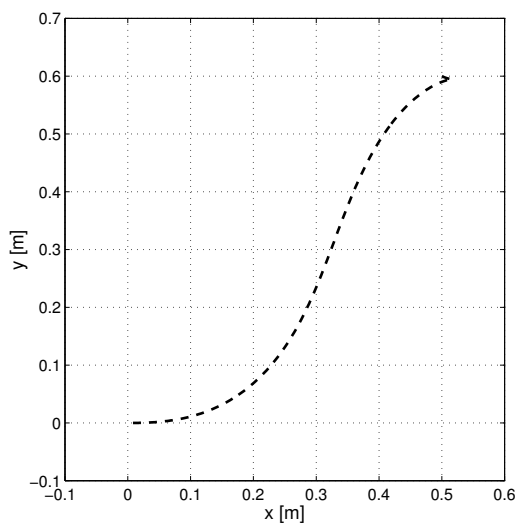
Rys. 7.25: Eksperyment E4 – zrealizowane sterowanie orientujące u_1 (—) i popychające u_2 (---) (jako rzeczywiste prędkości platformy ω oraz v).



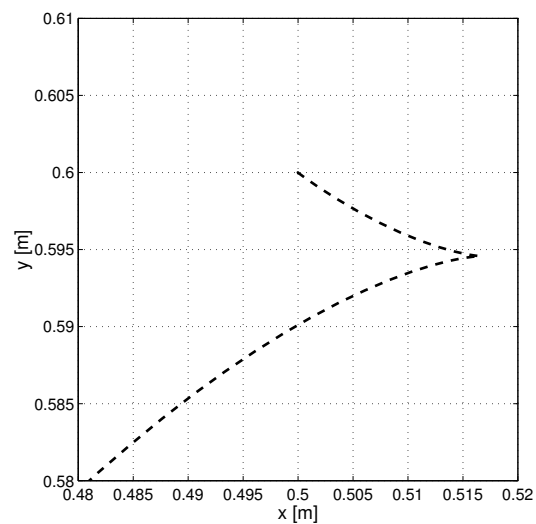
Rys. 7.26: Eksperyment E4 – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_\varphi|$ (-), $|e_x|$ (- -), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



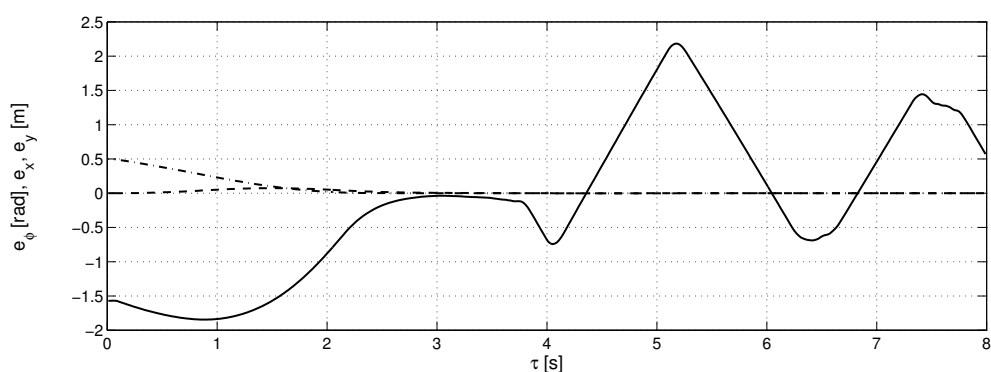
Rys. 7.27: Eksperyment E4 – prędkości kół robota: ω_P (-), ω_L (- -).



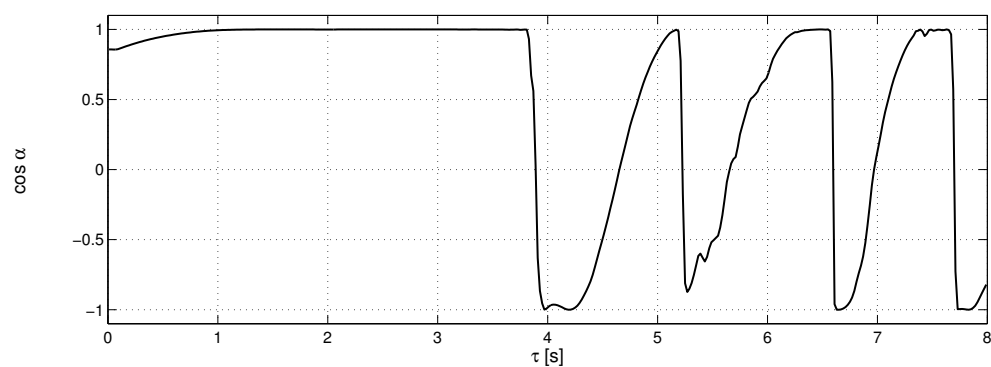
Rys. 7.28: Eksperyment E4 – ścieżka geometryczna kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota.



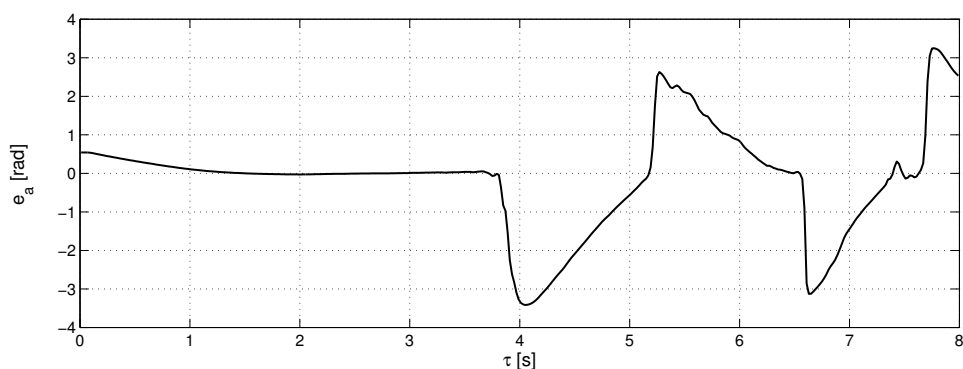
Rys. 7.29: Eksperyment E4 – ścieżka kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota (powiększone otoczenie punktu początkowego).



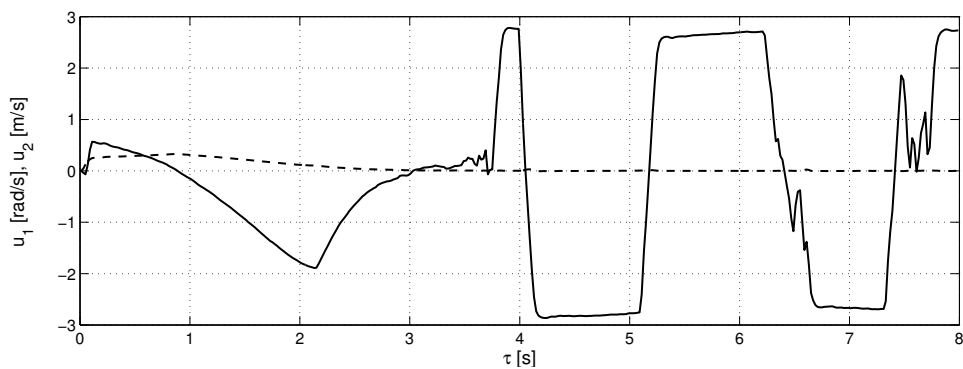
Rys. 7.30: Eksperyment E5 – błędy stabilizacji: e_φ (-), e_x (- -), e_y (-.).



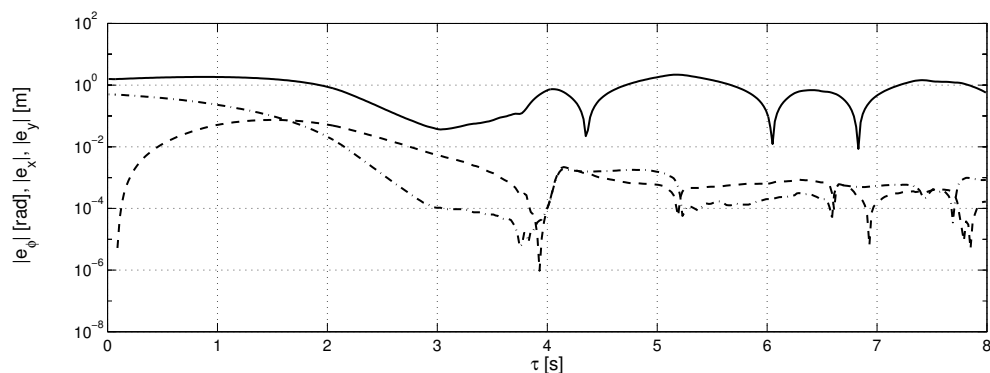
Rys. 7.31: Eksperyment E5 – efektywność orientowania pola g_2^* jako przebieg $\cos \alpha$, gdzie $\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$.



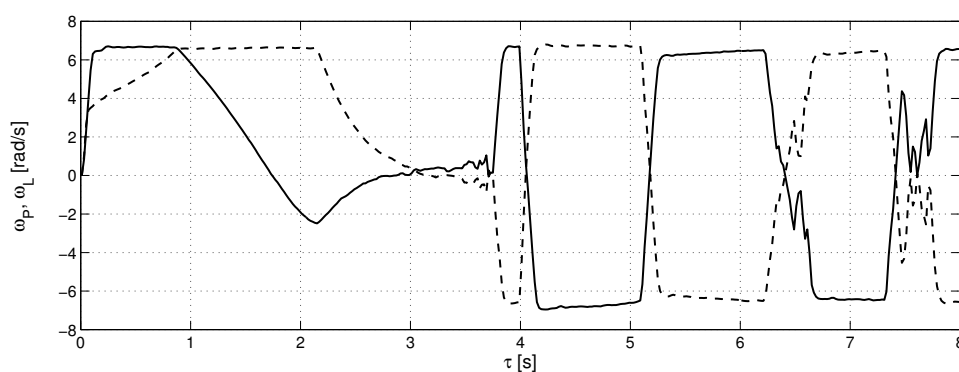
Rys. 7.32: Eksperyment E5 – pomocniczy bład orientacji e_a .



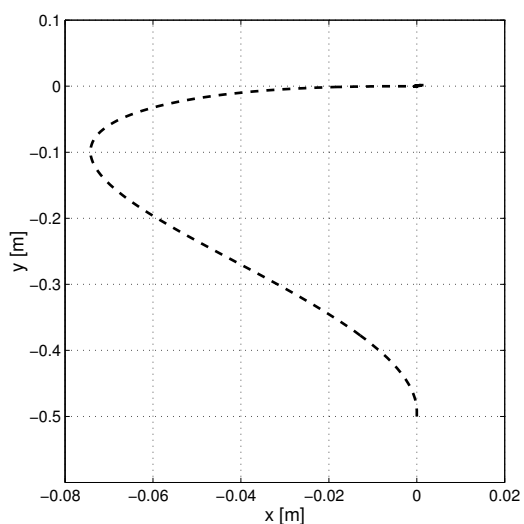
Rys. 7.33: Eksperyment E5 – zrealizowane sterowanie orientujące u_1 (-) i popychające u_2 (- -) (jako rzeczywiste prędkości platformy ω oraz v).



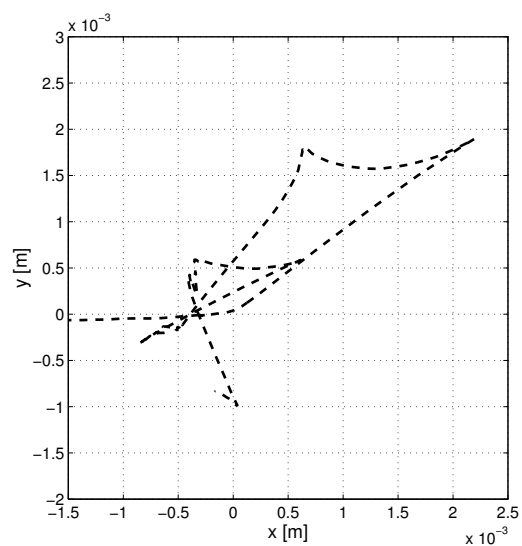
Rys. 7.34: Eksperyment E5 – bezwzględne wartości błędów stabilizacji: $|e_\phi|$ (-), $|e_x|$ (- -), $|e_y|$ (-.-) w skali logarytmicznej.



Rys. 7.35: Eksperyment E5 – prędkości kół robota: ω_P (-), ω_L (- -).



Rys. 7.36: Eksperyment E5 – ścieżka geometryczna kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota.



Rys. 7.37: Eksperyment E5 – ścieżka kreślona przez początek układu lokalnego platformy robota (powiększone otoczenie punktu stabilizacji).

Definicje niestandardowych funkcji

A.1 Funkcja $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$

Poniżej podano algorytm obliczania wartości ciągłej funkcji $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$ dla dyskretnej dziedziny czasu $\tau = iT_p$, $i \in \mathbb{N}$ (dla stałego bądź zmiennego okresu próbkowania $T_p > 0$).
Wyrażenie

$$\varphi_a(iT_p) = \text{Atan2c}(g_3(iT_p), g_2(iT_p)) \in \mathbb{R}$$

jest obliczane w następujący sposób:

- Krok 1 :** $\Phi_a(iT_p) = \text{Atan2}(g_3(iT_p), g_2(iT_p)) \in [-\pi, \pi]$,
- Krok 2 :** $F_\Phi : \varphi_a((i-1)T_p) \in \mathbb{R} \longrightarrow \Phi_a((i-1)T_p) \in [-\pi, \pi]$,
- Krok 3 :** $\Delta\Phi_a(iT_p) = \Phi_a(iT_p) - \Phi_a((i-1)T_p)$,
- Krok 4 :** IF $\Delta\Phi_a(iT_p) > +\pi$ THEN $\Delta\varphi_a(iT_p) = \Delta\Phi_a(iT_p) - 2\pi$,
IF $\Delta\Phi_a(iT_p) < -\pi$ THEN $\Delta\varphi_a(iT_p) = \Delta\Phi_a(iT_p) + 2\pi$,
- Krok 5 :** $\varphi_a(iT_p) = \varphi_a((i-1)T_p) + \Delta\varphi_a(iT_p)$,

gdzie $\text{Atan2}(g_3, g_2)$ jest klasyczną czterowartkową funkcją arctan, a F_Φ pozwala na odwzorowanie ciągłej dziedziny kąta w przedział $[-\pi, \pi]$. Funkcja $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot)$ stanowi zatem ciągłą wersję funkcji $\text{Atan2}(\cdot, \cdot)$.

Wyprowadzenia wyrażeń pomocniczych

B.1 Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.1)

Wyprowadzenie zależności (3.35) (oraz (3.65)) dla $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$. Korzystając z (3.34), (3.1), (3.8), (3.15) oraz (3.16) możemy zapisać:

$$\mathbf{r} \stackrel{(3.34)}{=} \mathbf{h}^* - \dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \stackrel{(3.15)}{=} \|\mathbf{h}^*\| \begin{bmatrix} \frac{h_2}{\|\mathbf{h}^*\|} - \cos \alpha \cos \varphi \\ \frac{h_3}{\|\mathbf{h}^*\|} - \cos \alpha \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[\frac{h_2^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2} - \frac{2h_2 \cos \alpha \cos \varphi}{\|\mathbf{h}^*\|} + \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + \right. \\ &+ \left. \frac{h_3^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2} - \frac{2h_3 \cos \alpha \sin \varphi}{\|\mathbf{h}^*\|} + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi \right] = \\ &= \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[1 - 2 \cos \alpha \frac{h_2 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi}{\|\mathbf{h}^*\|} + \cos^2 \alpha \right] = \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - 2 \cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Wyprowadzenie zależności (3.36) (oraz (3.66)).

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \alpha(\varphi) &\stackrel{(3.16)}{=} 1 - \frac{(h_2 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi)^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2 \|\mathbf{g}_2^*\|^2} = \frac{h_2^2 + h_3^2 - (h_2 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi)^2}{h_2^2 + h_3^2} = \\ &= \frac{(h_2 \sin \varphi - h_3 \cos \varphi)^2}{h_2^2 + h_3^2}. \end{aligned}$$

Zakładając, że $\varphi \rightarrow \varphi_a$, na podstawie (3.10) dostajemy:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \tan \varphi = \frac{h_3}{h_2} \Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \sin \varphi = \frac{h_3 \cos \varphi}{h_2}.$$

Podstawiając powyższą relację do wcześniej wyprowadzonego wyrażenia na $1 - \cos^2 \alpha(\varphi)$ otrzymujemy (3.36).

Wyprowadzenie zależności (3.70).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\varphi) \\ \dot{y}(\varphi) \end{bmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} u_2 \stackrel{(3.17)}{=} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{h}^* = \begin{bmatrix} h_2 \cos^2 \varphi + h_3 \cos \varphi \sin \varphi \\ h_2 \sin \varphi \cos \varphi + h_3 \sin^2 \varphi \end{bmatrix}.$$

W granicy dla $\varphi \rightarrow \varphi_a$ otrzymujemy:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \begin{bmatrix} \dot{x}(\varphi) \\ \dot{y}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \cos^2 \varphi_a + h_3 \cos \varphi_a \sin \varphi_a \\ h_2 \sin \varphi_a \cos \varphi_a + h_3 \sin^2 \varphi_a \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

oraz

$$\tan \varphi_a \stackrel{(3.10)}{=} \frac{h_3}{h_2} \Rightarrow \cos \varphi_a = \frac{h_2 \sin \varphi_a}{h_3}, \quad \sin \varphi_a = \frac{h_3 \cos \varphi_a}{h_2}. \quad (\text{B.2})$$

Podstawiając powyższe wyrażenia na $\cos \varphi_a$ oraz $\sin \varphi_a$ do odpowiednich elementów w (B.1) dostajemy:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \begin{bmatrix} \dot{x}(\varphi) \\ \dot{y}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \cos^2 \varphi_a + h_3 \frac{h_2 \sin \varphi_a}{h_3} \sin \varphi_a \\ h_2 \frac{h_3 \cos \varphi_a}{h_2} \cos \varphi_a + h_3 \sin^2 \varphi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

Przywołując na podstawie (3.48), że $\dot{e}_x = -\dot{x}$, $\dot{e}_y = -\dot{y}$ otrzymujemy relacje (3.70).

Sprawdzenie spełnienia nierówności $\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* > 0$ w granicy dla $\varphi \rightarrow \varphi_a$ oraz $e_x, e_y \rightarrow 0$. Zapiszmy, co następuje (dla $u_2 \neq 0$):

$$\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* = \cos \varphi \cos \varphi_t + \sin \varphi \sin \varphi_t \stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{u_2} (\dot{x} \cos \varphi_t + \dot{y} \sin \varphi_t).$$

Aby powyższe wyrażenie było dodatnie, musi zachodzić: $\text{sgn}(u_2) \text{sgn}(\dot{x} \cos \varphi_t + \dot{y} \sin \varphi_t) > 0$. Można pokazać, że dla $\varphi \rightarrow \varphi_a$ zachodzi: $\dot{x}(\varphi) = h_2$, $\dot{y}(\varphi) = h_3$ (patrz wyżej). Z porównania (3.59) z wyrażeniem $\varphi \stackrel{(3.1)}{=} \text{Atan2c}(\text{sgn}(u_2)\dot{y}, \text{sgn}(u_2)\dot{x})$ wynika także, że dla $\varphi \rightarrow \varphi_a$ mamy: $\text{sgn}(u_2) = \text{sgn}(e_{x0})$. Możemy zatem zapisać:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_a} \text{sgn}(u_2) \text{sgn}(\dot{x}(\varphi) \cos \varphi_t + \dot{y}(\varphi) \sin \varphi_t) &= \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(h_2 \cos \varphi_t + h_3 \sin \varphi_t) = \\ &\stackrel{(3.55)}{=} \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(k_p e_x \cos \varphi_t + \delta \cos^2 \varphi_t + k_p e_y \sin \varphi_t + \delta \sin^2 \varphi_t) = \\ &= \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(k_p (e_x \cos \varphi_t + e_y \sin \varphi_t) + \delta) = \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(k_p \mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* + \delta). \end{aligned}$$

Iloczyn skalarny $\mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^*$ w granicy dla $\lim_{e_x, e_y \rightarrow 0}$ jest równy $\|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \text{sgn}(e_x)$, co wynika bezpośrednio z faktu, że $\tan \varphi \rightarrow \tan \varphi_t$ w okolicy punktu stabilizacji (patrz dowód twierdzenia 3.3). Z geometrycznej interpretacji metody VFO oraz z wniosków dotyczących zbieżności sygnałów e_x oraz e_y (patrz dowód twierdzenia 3.3) wynika ponadto, że $\lim_{e_x, e_y \rightarrow 0} \text{sgn}(e_x) = \text{sgn}(e_{x0})$. Ostatecznie zatem zapiszemy co następuje:

$$\begin{aligned} \lim_{e_x, e_y \rightarrow 0} \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(k_p \mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* + \delta) &= \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(k_p \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \text{sgn}(e_x) + \delta) = \\ &\stackrel{(3.51)}{=} \text{sgn}(e_{x0}) \text{sgn}(k_p \|\mathbf{e}^*\| \text{sgn}(e_{x0}) - \eta \|\mathbf{e}^*\| \text{sgn}(e_{x0})) = \text{sgn}(k_p - \eta) > 0, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że $0 < \eta < k_p$ (patrz (3.51)).

B.2 Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.81)

Wyprowadzenie zależności (3.115) (oraz (3.145)) dla $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$. Korzystając z (3.114) oraz (3.107) można zapisać:

$$\mathbf{r} \stackrel{(3.114)}{=} \mathbf{h}^* - \dot{\mathbf{q}}^* \stackrel{(3.81)}{=} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} u_2 \stackrel{(3.94)}{=} \|\mathbf{h}^*\| \begin{bmatrix} \frac{h_2}{\|\mathbf{h}^*\|} - \sin \theta_1 k_2 \cos \alpha \\ \frac{h_3}{\|\mathbf{h}^*\|} - \cos \theta_1 \cos \theta_2 k_2 \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[\frac{h_2^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2} - \frac{2h_2 \sin \theta_1}{\|\mathbf{h}^*\|} k_2 \cos \alpha + \sin^2 \theta_1 k_2^2 \cos^2 \alpha + \right. \\ &+ \left. \frac{h_3^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2} - \frac{2h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\|\mathbf{h}^*\|} k_2 \cos \alpha + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 k_2^2 \cos^2 \alpha \right] = \\ &\stackrel{(3.95)}{=} \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[1 - 2 \frac{h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\|\mathbf{h}^*\| \|\mathbf{g}_2^*\|} \cos \alpha + \|\mathbf{g}_2^*\|^2 \frac{1}{\|\mathbf{g}_2^*\|^2} \cos^2 \alpha \right] = \\ &\stackrel{(3.96)}{=} \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Wyprowadzenie zależności (3.116) (oraz (3.146)).

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \alpha(\theta_1) &\stackrel{(3.96)}{=} 1 - \frac{(\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{h}^*)^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2 \|\mathbf{g}_2^*\|^2} = 1 - \frac{(h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2)^2}{(h_2^2 + h_3^2)(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)} = \\ &= \frac{(h_2^2 + h_3^2)(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) - (h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2)^2}{(h_2^2 + h_3^2)(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)} = \\ &= \frac{(h_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - h_3 \sin \theta_1)^2}{(h_2^2 + h_3^2)(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

W granicy dla $\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}$ mamy:

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \tan \theta_1 \stackrel{(3.90)}{=} \frac{h_2 \cos \theta_2}{h_3} \Rightarrow \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \sin \theta_1 = \frac{h_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{h_3}.$$

Podstawiając wyrażenie na $\sin \theta_1$ do licznika wyrażenia (B.3) uzyskujemy relację (3.116).

Wyprowadzenie zależności (3.150).

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2(\theta_1) &\stackrel{(3.81)}{=} \sin \theta_1 u_2 \stackrel{(3.94, 3.96)}{=} \frac{\sin \theta_1 (h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2)}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}, \\ \dot{\theta}_3(\theta_1) &\stackrel{(3.81)}{=} \cos \theta_1 \cos \theta_2 u_2 \stackrel{(3.94, 3.96)}{=} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 (h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2)}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

W granicy dla $\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}$ mamy:

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \tan \theta_1 \stackrel{(3.90)}{=} \frac{h_2 \cos \theta_2}{h_3} \Rightarrow \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} h_3 = \frac{h_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1}, \quad \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} h_2 = \frac{h_3 \sin \theta_1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}.$$

Podstawiając wyrażenia na h_3 oraz h_2 odpowiednio do pierwszego oraz do drugiego równania w (B.4) otrzymujemy (3.150).

Sprawdzenie spełnienia nierówności $\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* > 0$ w granicy dla $\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}$ oraz $e_2, e_3 \rightarrow 0$. Zapiszmy co następuje (dla $u_2 \neq 0$):

$$\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* = \sin \theta_1 \sin \theta_{1t} + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} \stackrel{(3.81)}{=} \frac{1}{u_2} (\dot{\theta}_2 \sin \theta_{1t} + \dot{\theta}_3 \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}).$$

Nierówność $\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* > 0$ zachodzi, gdy: $\text{sgn}(u_2) \text{sgn}(\dot{\theta}_2 \sin \theta_{1t} + \dot{\theta}_3 \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}) > 0$. Można pokazać, że dla $\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}$ zachodzi: $\dot{\theta}_2(\theta_1) = h_2$, $\dot{\theta}_3(\theta_1) = h_3$ (patrz wyżej). Z porównania (3.139) z wyrażeniem $\theta_1 \stackrel{(3.81)}{=} \text{Atan2c}(\text{sgn}(u_2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \text{sgn}(u_2) \dot{\theta}_3)$ wynika także, że dla $\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}$ mamy: $\text{sgn}(u_2) = \text{sgn}(e_{30})$. Możemy zatem zapisać:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_1 \rightarrow \theta_{1a}} \text{sgn}(u_2) \text{sgn}(\dot{\theta}_2(\theta_1) \sin \theta_{1t} + \dot{\theta}_3(\theta_1) \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}) &= \\ &= \text{sgn}(e_{30}) \text{sgn}(h_2 \sin \theta_{1t} + h_3 \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t}) = \\ \stackrel{(3.135)}{=} \text{sgn}(e_{30}) \text{sgn}(k_p e_2 \sin \theta_{1t} + \delta \sin^2 \theta_{1t} + k_p e_3 \cos \theta_{1t} \cos \theta_{2t} + \delta \cos^2 \theta_{1t} \cos^2 \theta_{2t}) &= \\ &= \text{sgn}(e_{30}) \text{sgn}(k_p \mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* + \delta \|\mathbf{g}_{2t}^*\|^2). \end{aligned}$$

Iloczyn skalarny $\mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^*$ w granicy dla $\lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0}$ jest równy $\|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \text{sgn}(e_3)$, co wynika bezpośrednio z faktu, że $\tan \theta_1 \rightarrow \tan \theta_{1t}$ w okolicy punktu stabilizacji (patrz dowód twierdzenia 3.5). Z geometrycznej interpretacji metody VFO oraz z wniosków dotyczących zbieżności sygnałów e_2 oraz e_3 (patrz dowód twierdzenia 3.5) wynika ponadto, że $\lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0} \text{sgn}(e_3) = \text{sgn}(e_{30})$. Ostatecznie zatem możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \lim_{e_2, e_3 \rightarrow 0} \text{sgn}(e_{30}) \text{sgn}(k_p \mathbf{e}^{*T} \mathbf{g}_{2t}^* + \delta \|\mathbf{g}_{2t}^*\|^2) &= \\ &= \text{sgn}(e_{30}) \text{sgn}(k_p \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \text{sgn}(e_3) + \delta \|\mathbf{g}_{2t}^*\|^2) = \\ \stackrel{(3.131)}{=} \text{sgn}(e_{30}) \text{sgn}(k_p \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \text{sgn}(e_{30}) - \eta \|\mathbf{e}^*\| \|\mathbf{g}_{2t}^*\| \text{sgn}(e_{30})) &= \\ &= \text{sgn}(k_p - \eta) > 0, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że $0 < \eta < k_p$ (patrz (3.131)).

B.3 Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.156)

Wyprowadzenie zależności (3.190) (oraz (3.219)) dla $\|\mathbf{h}^*\| \neq 0$. Korzystając z (3.189) oraz (3.165) można zapisać:

$$\mathbf{r} \stackrel{(3.189)}{=} \mathbf{h}^* - \dot{\mathbf{q}}^* \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \end{bmatrix} u_2 \stackrel{(3.171)}{=} \|\mathbf{h}^*\| \begin{bmatrix} \frac{h_2}{\|\mathbf{h}^*\|} - k_2 \cos \alpha \\ \frac{h_3}{\|\mathbf{h}^*\|} - y_1 k_2 \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}\|^2 &= \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[\frac{h_2^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2} - \frac{2h_2}{\|\mathbf{h}^*\|} k_2 \cos \alpha + k_2^2 \cos^2 \alpha + \right. \\
&+ \left. \frac{h_3^2}{\|\mathbf{h}^*\|^2} - \frac{2h_3 y_1}{\|\mathbf{h}^*\|} k_2 \cos \alpha + y_1^2 k_2^2 \cos^2 \alpha \right] = \\
&= \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[1 - 2 \frac{h_2 + h_3 y_1}{\|\mathbf{h}^*\|} k_2 \cos \alpha + (1 + y_1^2) k_2^2 \cos^2 \alpha \right] = \\
&\stackrel{(3.172)}{=} \|\mathbf{h}^*\|^2 \left[1 - 2 \frac{h_2 + h_3 y_1}{\|\mathbf{g}_2^*\| \|\mathbf{h}^*\|} \cos \alpha + \|\mathbf{g}_2^*\|^2 \frac{1}{\|\mathbf{g}_2^*\|^2} \cos^2 \alpha \right] = \\
&\stackrel{(3.173)}{=} \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{h}^*\|^2 (1 - \cos^2 \alpha).
\end{aligned}$$

Wyprowadzenie zależności (3.191) (oraz (3.220)).

$$\begin{aligned}
1 - \cos^2 \alpha(y_1) &\stackrel{(3.173)}{=} 1 - \frac{(h_2 + h_3 y_1)^2}{(1 + y_1^2)(h_2^2 + h_3^2)} = \frac{(1 + y_1^2)(h_2^2 + h_3^2) - h_2^2 - 2h_2 h_3 y_1 - h_3^2 y_1^2}{(1 + y_1^2)(h_2^2 + h_3^2)} = \\
&= \frac{(h_3 - h_2 y_1)^2}{(1 + y_1^2)(h_2^2 + h_3^2)}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

W granicy dla $y_1 \rightarrow y_{1a}$ mamy:

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} y_1 \stackrel{(3.167)}{=} \frac{h_3}{h_2}.$$

Podstawiając powyższą zależność do licznika wyrażenia (B.5) uzyskujemy relację (3.191).

Wyprowadzenie zależności (3.224).

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2(y_1) \\ \dot{y}_3(y_1) \end{bmatrix} \stackrel{(3.156)}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \end{bmatrix} u_2 \stackrel{(3.174)}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{h}^*}{1 + y_1^2} = \frac{1}{1 + y_1^2} \begin{bmatrix} h_2 + h_3 y_1 \\ (h_2 + h_3 y_1) y_1 \end{bmatrix}.$$

W granicy dla $y_1 \rightarrow y_{1a}$ otrzymujemy:

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} \begin{bmatrix} \dot{y}_2(y_1) \\ \dot{y}_3(y_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + y_{1a}^2} \begin{bmatrix} h_2 + h_3 y_{1a} \\ (h_2 + h_3 y_{1a}) y_{1a} \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

oraz

$$y_{1a} \stackrel{(3.167)}{=} \frac{h_3}{h_2}. \tag{B.7}$$

Podstawiając (B.7) do odpowiednich elementów w (B.6) dostajemy:

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_{1a}} \begin{bmatrix} \dot{y}_2(y_1) \\ \dot{y}_3(y_1) \end{bmatrix} = \frac{h_2^2}{h_2^2 + h_3^2} \begin{bmatrix} \frac{h_2^2 + h_3^2}{h_2} \\ \frac{h_2^2 + h_3^2}{h_2^2} h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

B.4 Wyrażenia pomocnicze dla modelu (3.238)

Wyprowadzenie zależności (3.262).

$$\begin{aligned}
 h_2 &\stackrel{(3.250)}{=} k_2(q_{2a} - q_2) + \dot{q}_{2a} \stackrel{(3.245)}{=} k_2(h_3 - q_2) + \dot{h}_3 = \\
 &\stackrel{(3.259)}{=} k_2(k_3 e_3 + \dot{q}_{3t} - q_2) + k_3 \dot{e}_3 + \ddot{q}_{3t} \stackrel{(3.238)}{=} k_2(k_3 e_3 + \dot{q}_{3t} - \dot{q}_3) + k_3 \dot{e}_3 + \ddot{q}_{3t} = \\
 &\stackrel{(3.257)}{=} (k_2 + k_3) \dot{e}_3 + k_2 k_3 e_3 + \ddot{q}_{3t} \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_1 &\stackrel{(3.247)}{=} k_1(q_{1a} - q_1) + \dot{q}_{1a} \stackrel{(3.245)}{=} k_1(h_2 - q_1) + \dot{h}_2 = \\
 &\stackrel{(B.8)}{=} k_1[(k_2 + k_3) \dot{e}_3 + k_2 k_3 e_3 + \ddot{q}_{3t} - q_1] + (k_2 + k_3) \ddot{e}_3 + k_2 k_3 \dot{e}_3 + \ddot{\ddot{q}}_{3t} = \\
 &\stackrel{(3.238)}{=} k_1[(k_2 + k_3) \dot{e}_3 + k_2 k_3 e_3 + \ddot{q}_{3t} - \ddot{q}_3] + (k_2 + k_3) \ddot{e}_3 + k_2 k_3 \dot{e}_3 + \ddot{\ddot{q}}_{3t} = \\
 &\stackrel{(3.257)}{=} (k_1 + k_2 + k_3) \ddot{e}_3 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \dot{e}_3 + k_1 k_2 k_3 e_3 + \ddot{\ddot{q}}_{3t}
 \end{aligned}$$

Wyprowadzenie zależności (3.272). Dla elementu h_3 otrzymujemy:

$$\lim_{e_3 \rightarrow 0} h_3(e_3, \cdot) \stackrel{(3.259)}{=} \dot{q}_{3t}(\tau). \tag{B.9}$$

Na podstawie definicji (3.250), dla elementu h_2 mamy:

$$\lim_{e_3, e_{2a} \rightarrow 0} h_2(e_{2a}, \dot{q}_{2a}) \stackrel{(3.250)}{=} \dot{q}_{2a} \stackrel{(3.245)}{=} \frac{dh_3(e_3, \cdot)}{d\tau} \stackrel{(B.9)}{=} \frac{d\dot{q}_{3t}(\tau)}{d\tau} \stackrel{(3.255)}{=} \dot{q}_{2t}(\tau). \tag{B.10}$$

Na podstawie definicji (3.247), dla elementu h_1 mamy:

$$\lim_{e_3, e_{2a}, e_{1a} \rightarrow 0} h_1(e_{1a}, \cdot) \stackrel{(3.247)}{=} \dot{q}_{1a} \stackrel{(3.245)}{=} \frac{dh_2(e_{2a}, \cdot)}{d\tau} \stackrel{(B.10)}{=} \frac{d\dot{q}_{2t}(\tau)}{d\tau} \stackrel{(3.255)}{=} \dot{q}_{1t}(\tau). \tag{B.11}$$

Zatem w granicy dla $e_3, e_{2a}, e_{1a} \rightarrow 0$ zachodzi: $\mathbf{h}(e_3, e_{2a}, e_{1a}, \cdot) \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_t(\tau)$.

Dyskretna implementacja bloku regulatora w obwodzie regulacji prędkości koła robota MMS

Zastosowanie dyskretyzacji metodą *Eulera wstecz* do (6.4) prowadzi (po uporządkowaniu) do następujących równań różnicowych zaimplementowanych w sterowniku robota MMS:

$$\begin{aligned}
 e_f(n) &= \omega_{df}(n) - \omega_f(n), \\
 u_P(n) &= K_p e_f(n), \\
 u_D(n) &= K_d [u_P(n) - u_P(n-1)], \\
 u_I(n) &= u_I(n-1) + K_i u_P(n), \\
 e_{sat}(n-1) &= u_{sat}(n-1) - u(n-1), \\
 \bar{u}_I(n) &= u_I(n) + K_c e_{sat}(n-1), \\
 u_{PID}(n) &= u_P(n) + \bar{u}_I(n) + u_D(n), \\
 u(n) &= u_{PID}(n) + u_{FF}(n), \\
 u_{sat}(n) &= \text{Sat}(u(n), u_{max}, u_{min}),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$K_d = \frac{T_d}{T_p K_p}, \quad K_i = \frac{T_p}{T_i K_p}, \quad (\text{C.1})$$

oraz przyjęto, że czas opóźnienia T_0 w (6.4) jest równy okresowi T_p .

Literatura

- [ACBB95] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, A. Balestrino. Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2:27–35, 1995.
- [AMS03] G. Artus, P. Morin, C. Samson. Tracking of an omnidirectional target with a unicycle-like robot: control design and experimental results. Raport instytutowy 4849, INRIA, Sophia Antipolis, France, 2003.
- [Ast95a] A. Astolfi. Exponential stabilization of a car-like vehicle. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 1391–1396, Nagoya, Japan, 1995.
- [Ast95b] A. Astolfi. Exponential stabilization of a wheeled mobile robot via discontinuous control. *Symposium on Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS)*, strony 741–746, 1995.
- [Ast96] A. Astolfi. *Asymptotic stabilization of nonholonomic systems with discontinuous control*. Praca doktorska, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1996.
- [Ast98] A. Astolfi. Discontinuous control of the brockett integrator. *Euro. J. Control*, 4:49–53, 1998.
- [BD94] A. Bloch, S. Drakunov. Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes. *Proceedings of the 33th Conference on Decision and Control*, strony 2961–2963, Lake Buena Vista, FL, grudzień 1994.
- [BD95] A. Bloch, S. Drakunov. Tracking in nonholonomic dynamic systems via sliding modes. *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, strony 2103–2106, New Orleans, LA, grudzień 1995.
- [Blo03] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*. Systems and Control. Springer, New York, 2003.
- [BR95] M. K. Bennani, P. Rouchon. Robust stabilization of flat and chained systems. *Proceedings of the Third European Control Conference*, strony 2642–2646, Rzym, 1995.

-
- [BRM92] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu, N. H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1746–1757, listopad 1992.
- [Bro83] R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, redaktorzy, *Differential Geometric Control Theory*, strony 181–191. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Chw04] D. Chwa. Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robot in polar coordinates. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(4):637–644, lipiec 2004.
- [CN02] Woojin Chung, Yoshihiko Nakamura. Design and control of a chained form manipulator. *I. J. Robotic Res.*, 21(5-6):389–408, 2002.
- [DDZB01] W. E. Dixon, D. M. Dawson, E. Zergeroglu, A. Behal. *Nonlinear control of wheeled mobile robots*. Springer, London, 2001.
- [DDZZ00] W. E. Dixon, D. M. Dawson, E. Zergeroglu, F. Zhang. Robust tracking and regulation control for mobile robots. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (10):199–216, 2000.
- [DGHC05] W. E. Dixon, T. Galluzo, G. Hu, C. Crane. Adaptive velocity field control of a wheeled mobile robot. *Proceedings of the Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 145–150, Dymaczewo, 2005.
- [DJD00] W. E. Dixon, Z. P. Jiang, D. M. Dawson. Global exponential setpoint control of wheeled mobile robots: a Lyapunov approach. *Automatica*, strony 1741–1746, 2000.
- [DK05] I. Duleba, W. Kheffi. A Lie algebraic method of motion planning for driftless nonholonomic systems. *Proceedings of the Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 79–84, 2005.
- [DMM01] P. Dutkiewicz, M. Michalski, M. Michałek. Robust tracking with control vector constraints. *Proceedings of the Second International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 169–174, Bukowy Dworek, October 2001.
- [dNCB95] B. d’Andrea Novel, G. Campion, G. Bastin. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. *International Journal of Robotics Research*, strony 543–559, 1995.
- [Dul98] I. Duleba. *Algorithms of motion planning for nonholonomic robots*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1998.
- [Dul00] I. Duleba. Channel algorithm of transversal passing through singularities for non-redundant robot manipulators. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 1302–1307, San Francisco, CA, April 2000.

-
- [Dul01] I. Dulęba. *Metody i algorytmy planowania ruchu robotów mobilnych i manipulacyjnych*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2001.
- [dWKSS93] C. Canudas de Wit, H. Khenouf, C. Samson, O. J. Sørдалen. Nonlinear control design for mobile robots. Y.F. Zheng, redaktor, *Recent Trends in Mobile Robots*, wolumen 11, strony 121–156. World Scientific, Singapore, 1993.
- [dWR91] C. Canudas de Wit, R. Roskam. Path following of a 2-dof wheeled mobile robot under path and input torque constraints. *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 1142–1147, Sacramento, California, 1991.
- [dWS92] C. Canudas de Wit, O. J. Sørдалen. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions of Automatic Control*, 37:1791–1797, listopad 1992.
- [dWSB96] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [FL97] R. Fierro, F. L. Lewis. Control of nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics. *Journal of Robotic Systems*, strony 149–163, 1997.
- [GHy02] M. J. Giergiel, Z. Hendzel, W. Żylski. *Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002.
- [Gro03] Digital Control Systems Group. *Digital Motor Control. Software Library*. Texas Instruments Inc., 2003.
- [IQ:02] *IQmath Library. A Virtual Floating Point Engine*. Texas Instruments Inc., 2002.
- [JEKA05] S. Javid, M. Eghtesad, A. Khayatian, H. Asadi. Experimental study of dynamic based feedback linearization for trajectory tracking of a four-wheel autonomous ground vehicle. *Auton. Robots*, 19(1):27–40, 2005.
- [JLN01] Z. Jiang, E. Lefeber, H. Nijmeijer. Saturated stabilization and tracking of a nonholonomic mobile robot. *Systems and Control Letters*, 42:327–332, 2001.
- [JN99] Z. Jiang, H. Nijmeijer. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2):265–279, luty 1999.
- [KKMN90] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, T. Noguchi. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 384–389, maj 1990.
- [KM95] I. Kolmanowsky, N. H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems*, strony 20–36, 1995.

-
- [KM02] K. Kozłowski, J. Majchrzak. Nowe algorytmy sterowania nieholonomicznym robotem mobilnym. *XIV Krajowa Konferencja Automatyki*, strony 625–632, Zielona Góra, 2002.
- [KMMP06] K. Kozłowski, J. Majchrzak, M. Michałek, D. Pazderski. Posture stabilization of a unicycle mobile robot – two control approaches. *Robot Motion and Control. Recent Developments*, wolumen 335 serii *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2006.
- [KMP05] K. Kozłowski, M. Michałek, D. Pazderski. Posture stabilization of a 3-link nonholonomic manipulator – two control approaches. *CMS'05, Computer Methods and Systems, V Konferencja Metody i systemy komputerowe*, strony 123–134, Kraków, 2005.
- [KP04] K. Kozłowski, D. Pazderski. Modelling and control of 4-wheel skid-steering mobile robot. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 14(4):477–496, 2004.
- [KT02] B. M. Kim, P. Tsiotras. Controllers for unicycle-type wheeled robots: theoretical results and experimental validation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(3):294–307, 2002.
- [LA98] M. C. Laiou, A. Astolfi. Discontinuous stabilization of nonlinear systems (wykład). Lund, październik 1998.
- [LaV06] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, 2006.
- [Liz03] D. A. Lizárraga. Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16:255–277, 2003.
- [LMS98] D.A. Lizárraga, P. Morin, C. Samson. Non-robustness of continuous homogeneous stabilizers for affine control systems. Raport instytutowy, INRIA, Sophia Antipolis, październik 1998.
- [LO95] A. De Luca, G. Oriolo. Modeling and control of nonholonomic mechanical systems. J. Angeles, A. Kecskementhy, redaktorzy, *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems*, strony 277–342. Springer-Verlag, Wiedeń, 1995.
- [LO01] P. Lucibello, G. Oriolo. Robust stabilization via iterative state steering with an application to chained-form systems. *Automatica*, (37):71–79, 2001.
- [LOS98] A. De Luca, G. Oriolo, C. Samson. Feedback control of a nonholonomic car-like robot. J. P. Laumond, redaktor, *Robot Motion Planning and Control*, strony 170–253. Springer, 1998.
- [LS90] G. Lafferriere, H. J. Sussmann. Motion planning for controllable systems without drift: A preliminary report. Raport instytutowy, Rutgers Center for Systems and Control, 1990.

-
- [LSL98] J. P. Laumond, S. Sekhavat, F. Lamiroux. Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots. J. P. Laumond, redaktor, *Robot Motion Planning and Control*, strony 1–53. Springer, 1998.
- [LSLT01] Ti-Chung Lee, Kai-Tai Song, Ching-Hung Lee, Ching-Cheng Teng. Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller. *IEEE Transactions On Control System Technology*, 9(2):305–318, Mar 2001.
- [MCS99] R. Mukherjee, D. Chen, G. Song. Feedback control strategies for a nonholonomic mobile robot using a nonlinear oscillator. *Journal of Robotic Systems*, strony 237–248, 1999.
- [Mic04] M. Michałek. Tracking controller for nonholonomic steering system with velocity constraints. I. Duleba, J.Z. Sasiadek, redaktorzy, *Proceedings volume from the 7th IFAC Symposium SYROCO, Robot Control 2003*, wolumen 2. Elsevier LTD, 2004.
- [MK04] M. Michałek, K. Kozłowski. Tracking controller with vector field orientation for 3-D nonholonomic manipulator. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 181–189, Puszczykowo, 2004.
- [MK05a] M. Michałek, K. Kozłowski. Asymptotic stabilization for the 3-d chained system: the vector field orientation approach. *Proceedings of the 5th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 97–104, Dymaczewo, 2005.
- [MK05b] M. Michałek, K. Kozłowski. Asymptotic stabilization of the unicycle mobile robot: the vector field orientation approach. *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, strony 615–620, Międzyzdroje, 2005.
- [MK05c] M. Michałek, K. Kozłowski. Sterowanie nieholonomicznym robotem mobilnym metodą orientowania pola wektorowego. K. Tchoń, redaktor, *Postępy Robotyki*, strony 235–246. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005.
- [MK05d] M. Michałek, K. Kozłowski. Sterowanie nieholonomicznym systemem łańcuchowym metodą orientowania pola wektorowego. *XV Krajowa Konferencja Automatyki*, wolumen 2, strony 271–276, Warszawa, 2005.
- [MK05e] M. Michałek, K. Kozłowski. Trajectory tracking for a threecycle mobile robot: the vector field orientation approach. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC'05*, strony 1119–1124, Sevilla, Hiszpania, 2005.
- [MM97] R. M'Closkey, R. M. Murray. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):614–628, maj 1997.

-
- [MM98] R. M'Closkey, P. Morin. Time-varying homogeneous feedback: design tools for the exponential stabilization of systems with drift. *International Journal on Control*, 71(5):837–869, 1998.
- [MN05] A. Mazur, Ł. Nocek. Trajectory tracking for rigid 3-pendulum with nonholonomic gears. *Proceedings of the 5th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 187–192, Dymaczewo, 2005.
- [MPS98] P. Morin, J. B. Pomet, C. Samson. Developments in time-varying feedback stabilization of nonlinear systems. *IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS)*, strony 587–594, 1998.
- [MS93] R.M. Murray, S.S. Sastry. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 38(5):700–716, maj 1993.
- [MS99] P. Morin, C. Samson. Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 4:1–35, 1999.
- [MS01a] P. Morin, C. Samson. A characterization of the Lie algebra rank condition by transverse periodic functions. *SIAM J. Control Optim.*, 40(4):1227–1249, 2001.
- [MS01b] P. Morin, C. Samson. Practical stabilization of driftless systems on Lie groups. Raport instytutowy 4294, INRIA, Sophia Antipolis Cedex, France, 2001.
- [MS02] P. Morin, C. Samson. Feedback control of nonholonomic wheeled vehicles. A survey. K. Kozłowski, K. Tchoń, redaktorzy, *Archives of Control Sciences*, wolumen 12(XLVIII), strony 7–36. Silesian University of Technology, 2002.
- [MS03] P. Morin, C. Samson. Practical stabilization of driftless systems on Lie groups: The transverse function approach. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 48(9):1496–1508, 2003.
- [MS04] P. Morin, C. Samson. Trajectory tracking for non-holonomic vehicles: overview and case study. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 139–153, Puszczkowo, 2004.
- [Mu04] A. Mazur, B. Łukasik. The input-output decoupling controller for nonholonomic mobile manipulators. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 155–160, Puszczkowo, 2004.
- [NCS01] Y. Nakamura, W. Chung, O. J. Sørдалen. Design and control of the non-holonomic manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(1):48–59, Luty 2001.
- [NvdS90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.

-
- [OLV02] G. Oriolo, A. De Luca, M. Venditteli. WMR control via dynamic feedback linearization: design, implementation and experimental validation. *IEEE Transactions On Control System Technology*, strony 835–852, listopad 2002.
- [Per02] W. Perruquetti. Stability and stabilization. W. Perruquetti, J. P. Barbot, redaktorzy, *Sliding Mode Control in Engineering*, Control Engineering Series, strony 191–215. Merceel Dekker, New York, 2002.
- [PK05] D. Pazderski, K. Kozłowski. Practical stabilization of two-wheel mobile robot with velocity limitations using time-varying control law. *Proceedings of the Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 205–212, Dymaczewo, 2005.
- [PKa04] D. Pazderski, K. Kozłowski, M. Ławniczak. Practical stabilization of 4WD skid-steering mobile robot. *Proceedings of the Fourth International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 175–180, Puszczykowo, 2004.
- [Pom92] J. B. Pomet. Explicit design of time varying stabilization control laws for a class of controllable systems without drifts. *Systems and Control Letters*, strony 147–158, 1992.
- [SAA91] C. Samson, K. Ait-Abderrahim. Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space. *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 1136–1141, Sacramento, CA, 1991.
- [Sam90] C. Samson. Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart. *International Workshop in Adaptive and Nonlinear Control: Issues in Robotics*, wolumen 162, strony 125–151, Grenoble, Francja, 1990. Springer-Verlag.
- [Sam91] C. Samson. Time-varying feedback stabilization of nonholonomic car-like mobile robots. Raport instytutowy 1515, INRIA, Cedex, France, 1991.
- [Sam92] C. Samson. Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot. *Proc. Int. Conf. ICARCV'92*, strony 13.1.1–13.1.5, Singapur, 1992.
- [Sam93] C. Samson. Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, strony 55–64, February 1993.
- [Sam95] C. Samson. Control of chained systems; application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions On Automatic Control*, strony 64–77, styczeń 1995.
- [Sas99] S. Sastry. *Nonlinear systems. Analysis, stability and control*. Springer-Verlag, Nowy York, 1999.
- [SdW93] O. J. Sørдалen, C. Canudas de Wit. Exponential control law for a mobile robot: Extention to path following. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6):837–842, 1993.

- [SE95] O.J. Sørдалen, O. Egeland. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):35–49, styczeń 1995.
- [SNC94] O. J. Sørдалen, Y. Nakamura, W. J. Chung. Control of a nonholonomic manipulator. L. Sciavicco, C. Bonivetto, F. Nicolo, redaktorzy, *Robot Control 1994*, strony 279–284. Pergamon, Capri, Italy, 1994.
- [Sø93] O. J. Sørдалen. *Feedback control of nonholonomic mobile robots*. Praca doktorska, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, 1993.
- [SR03] J. S. Sequeira, M. I. Ribeiro. Single and multiple robot control: A geometric approach. Raport instytutowy RT-602-03, Instituto de Sistemas e Robotica, Polo de Lisboa, 2003.
- [TKW02] K. Tchoń, M. Kabała, M. Wnuk. Algorytm śledzenia trajektorii robota mobilnego mk. *XIV Krajowa Konferencja Automatyki*, strony 663–668, Zielona Góra, 2002.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne. Modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.
- [TUT02] K. Tsuchiya, T. Urakubo, K. Tsujita. Motion control of a nonholonomic system based on the Lyapunov control method. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, strony 285–290, marzec-kwiecień 2002.
- [Ura05] T. Urakubo. Discontinuous feedback stabilization of a class of nonholonomic systems based on Lyapunov control. *Proceedings of the Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*, strony 91–96, Dymaczewo, 2005.
- [WTSL94] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, J. P. Laumond. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions of Automatic Control*, strony 216–222, 1994.
- [YLB00] B. J. Young, J. R. Lawton, R. W. Beard. Two hybrid control schemes for nonholonomic robots. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 1824–1829, San Francisco, CA, kwiecień 2000.