STEROWANIE NIEHOLONOMICZNYM SYSTEMEM ŁAŃCUCHOWYM METODĄ ORIENTOWANIA POLA WEKTOROWEGO†

Maciej MICHAŁEK, Krzysztof KOZŁOWSKI

Politechnika Poznańska, Instytut Sterowania i Inżynierii Systemów
ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań, e-mail:imie.nazwisko@put.poznan.pl

Streszczenie: Artykuł prezentuje propozycję rozwiązania zadania śledzenia trajektorii dla nieholonomicznego systemu łańcuchowego z trójwymiarowym wektorem stanu. Metodologia projektowania prawa sterowania (zwana metodą orientowania pola wektorowego [11, 12]) wynika z analizy postaci pól-generatorów w modelu kinematyki rozważanego systemu i geometrycznej interpretacji jego ewolucji w odpowiedzi na sygnały wejściowe. Praca wyjaśnia proponowaną strategię sterowania oraz zawiera jej symulacyjną weryfikację.

Słowa kluczowe: system łańcuchowy, ograniczenia nieholonomiczne, śledzenie trajektorii, pole wektorowe.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie sterowania układami nieholonomicznymi, czyli silnie nieliniowymi układami z nałożonymi niecałkowalnymi więzami prędkościowymi, stanowi od dłuższego już czasu pole intensywnych badań. Trudności w projektowaniu sterowania dla wspomnianej klasy systemów dynamicznych wynikają z mniejszej liczby sygnałów sterujących w stosunku do liczby sterowanych zmiennych stanu przy jednoczesnej obecności więzów nieholonomicznych. Własność sterowalności rozważanych układów nie determinuje w ogólności ich stabilizowalności – zgodnie z [4] nie istnieje statyczne i ciągłe sprzężenie od stanu pozwalające na stabilizację takich układów w punkcie. Występowanie więzów nieholonomicznych utrudnia również projektowanie praw stabilizacji trajektorii (zadanie śledzenia trajektorii). W ciągu ostatnich kilkunastu lat zaproponowano wiele metod rozwiązujących lokalnie bądź globalnie poszczególne problemy sterowania dla systemów nieholonomicznych [10, 13, 3, 15]. Metody te wykorzystują takie techniki, jak linearyzacja dynamiczna [5, 16, 18], transformacje modeli do innych przestrzeni [2, 1], teoria stabilności Lapunowa [1, 9, 6, 7], teoria algebr i grup Liego [14] i inne. Należy zauważyć, że część proponowanych w literaturze rozwiązań wymaga nałożenia znacznych ograniczeń na sygnały referencyjne lub stosuje się do jednego tylko wybranego modelu systemu nieholonomicznego. Ciągle zatem otwartymi problemami pozostają: unifikacja podejścia do sterowania całymi podklasami układów nieholonomicznych (atrakcyjne podejście gwarantujące stabilność praktyczną zaproponowano np. w pracy [14]), kwestia syntezy regulatorów oraz jakość regulacji w stanach przejściowych. Problemy z syntezą praw sterowania wynikają głównie ze stosowania abstrakcyjnego aparatu matematycznego do formułowania prawa sterowania i tym samym braku fizykalnej interpretacji poszczególnych jego składników. W niniejszej pracy zaprezentowana zostanie propozycja rozwiązania zadania śledzenia trajektorii dla nieholonomicznego układu łańcuchowego:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_2 \end{aligned} \tag{1}$$

z trójwymiarowym wektorem stanu $\boldsymbol{x} \triangleq [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ i dwoma sterowaniami u_1, u_2 z zastosowaniem metody orientowania pola wektorowego. Metoda ta opiera się na prostej analizie postaci pól-generatorów bezdryfowego modelu kinematyki (1) oraz na geometrycznej interpretacji ewolucji rozważanego systemu w odpowiedzi na sygnały sterujące. Zastosowanie metody orientowania pól wektorowych dotyczy całej podklasy systemów nieholonomicznych o specyficznych własnościach modelu, a jej zastosowanie do rozwiązania zadania śledzenia dla jednokołowego robota mobilnego oraz nieholonomicznego manipulatora można znaleźć w pracach [11, 12]. Rozważany model systemu łańcuchowego stanowi ważny przykład próby unifikacji podejścia do sterowania systemami nieholonomicznymi z tego względu, iż bardzo wiele takich systemów można (przynajmniej lokalnie) zastąpić modelem łańcuchowym poprzez odpowiednią transformację wektora stanu oraz zmianę definicji sygnałów wejściowych (przykłady można znaleźć w pracach [2, 6, 17]).

2. KINEMATYKA SYSTEMU

W dalszej części pracy rozważać będziemy 3-wymiarowy układ łańcuchowy o wektorze stanu $\boldsymbol{x} \triangleq [x_1\ x_2\ x_3]^T \in$

†Praca finansowana ze środków MNiI–KBN w latach 2004-2006 jako projekt badawczy 3 T11A 009 27.

$\mathbb{R}^3$ oraz sterowaniach $\boldsymbol{u} = [u_1\ u_2]^T \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\triangleq u_2, \\ \dot{x}_2 &\triangleq u_1, \\ \dot{x}_3 &\triangleq x_2 u_2, \end{aligned} \tag{2}$$

który można zapisać w ogólnej formie kinematyki bezdryfowej:

$$\dot{\boldsymbol{x}} \triangleq \boldsymbol{g}_1 u_1 + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) u_2, \tag{3}$$

gdzie w tym przypadku pola-generatory mają postać

$$\boldsymbol{g}_1 = [0\ 1\ 0]^T, \quad \boldsymbol{g}_2(x_2) = [1\ 0\ x_2]^T. \tag{4}$$

Z pierwszego i trzeciego równania w (2) dostajemy następujące niecałkowalne ograniczenia prędkościowe:

$$\dot{x}_3 - x_2 \dot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \dot{\boldsymbol{x}} = 0, \tag{5}$$

gdzie $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = [-x_2\ 0\ 1]$ jest macierzą ograniczeń.

Wyróżnimy w układzie (2) 2-wymiarowy podsystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}^* \triangleq \boldsymbol{g}_2^*(x_2) u_2 \tag{6}$$

utworzony poprzez wycięcie drugiego wiersza w (3), gdzie:

$$\boldsymbol{x}^* \triangleq [x_1\ x_3]^T, \qquad \boldsymbol{g}_2^*(x_2) \triangleq [1\ x_2]^T. \tag{7}$$

Zakładamy ponadto, że model referencyjny definiujący trajektorię referencyjną ma strukturę zgodną z (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1t} &\triangleq u_{2t}, \\ \dot{x}_{2t} &\triangleq u_{1t}, \\ \dot{x}_{3t} &\triangleq x_{2t} u_{2t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Trajektoria referencyjna (tzw. trajektoria dopuszczalna[1]) $\boldsymbol{x}_t(t) \triangleq [x_{1t}(t)\ x_{2t}(t)\ x_{3t}(t)]^T$ wynika z całkowania modelu (8) w całym czasowym horyzoncie sterowania $t \in [0, \tau]$ oraz zakłada się, że jest ona ustawicznie pobudzająca[2].

3. STRATEGIA STEROWANIA

Spróbujmy zinterpretować geometrycznie postać i potencjalną ewolucję systemu (3). Pierwsze pole-generator $\boldsymbol{g}_1$ jest polem stałym skierowanym wzdłuż osi prędkości $\dot{x}_2$. Drugie pole-generator $\boldsymbol{g}_2(x_2)$ jest funkcją tylko zmiennej x_2, która determinuje chwilową orientację (kierunek) tego pola w $\mathbb{R}^2$ (precyzyjniej w $\mathbb{R}^3$, ale druga składowa tożsamościowo równa jest zero – orientacja $\boldsymbol{g}_2$ w $\mathbb{R}^3$ jest tożsama z orientacją $\boldsymbol{g}_2^*$ w $\mathbb{R}^2$). Skoro zmienna x_2 określa kierunek $\boldsymbol{g}_2(x_2)$, to nazwiemy ją *zmienną orientującą*, a sterowanie u_1, które bezpośrednio wpływa na zmianę x_2 – *sterowaniem orientującym*. Sterowanie u_2 natomiast ma wpływ na zmianę jedynie zmiennych x_1 oraz x_3 wzdłuż pola $\boldsymbol{g}_2(x_2)$. Można powiedzieć, że u_2 *popycha* podsystem (6) wzdłuż generatora $\boldsymbol{g}_2(x_2)$, zatem u_2 nazwiemy sterowaniem *popychającym*. Załóżmy teraz, że dany jest pewien wektor zbieżności $\boldsymbol{h} = [h_1\ h_2\ h_3]^T \in \mathbb{R}^3$ definiujący dystans[3] do trajektorii referencyjnej $\boldsymbol{x}_t^* \triangleq [x_{1t}\ x_{3t}]^T$ oraz pożądany kierunek ewolucji systemu (2) gwarantujący zbieżność (2) do trajektorii referencyjnej $\boldsymbol{x}_t$. Zadanie śledzenia można teraz podzielić na dwa podzadania: zadaniem sterowania u_1 będzie wymuszenie takiej ewolucji zmiennej x_2, by bieżący kierunek pola $\boldsymbol{g}_2(x_2)$ nakładać na kierunek wektora $\boldsymbol{h}$, co można zapisać jako:

$$u_1 : \left\{ \lim_{t \to \infty} \left(\boldsymbol{g}_2(x_2)\, k = \boldsymbol{h} \right) \right\}, \tag{9}$$

gdzie $k = k() \neq 0$ oznacza pewną skalarną funkcję. Podstawiając odpowiednie postaci pól do powyższej relacji oraz przyrównując poszczególne współrzędne tych pól uzyskamy następujące warunki wskazujące na sposób projektowania sterowania u_1 [11, 12]:

$$u_1 : \left\{ \lim_{t \to \infty} (x_2 = h_3/h_1) \ \wedge \ \lim_{t \to \infty} (h_2 = 0) \right\}, \tag{10}$$

Zadaniem sterowania u_2 pozostanie popychanie podsystemu (6) wzdłuż chwilowego kierunku $\boldsymbol{g}_2(x_2)$ (z tego względu, że nałożenie kierunku $\boldsymbol{g}_2(x_2)$ na $\boldsymbol{h}$ nie może być zrealizowane natychmiastowo, uzasadnione wydaje się popychanie podsystemu (6) proporcjonalnie do chwilowego ortogonalnego rzutu wektora zbieżności na kierunek generatora $\boldsymbol{g}_2(x_2)$). Postać wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$ będzie miała decydujący wpływ na charakter stanów przejściowych systemu (2), czyli sposób dochodzenia do trajektorii referencyjnej. Dodatkowo konstrukcja wektora $\boldsymbol{h}$ winna zapewniać zbieżność zmiennej x_2 do wartości referencyjnej x_{2t} w pobliżu trajektorii referencyjnej $(x_{1t}, x_{3t}) \in \mathbb{R}^2$. W tym momencie należy zauważyć, że pole $\boldsymbol{g}_2(x_2) = [g_1\ g_2\ g_3]^T = [1\ 0\ x_2]^T$ nie jest w pełni orientowalne [11], ponieważ jego pierwsza składowa nie jest funkcją zmiennej orientującej[4]. Nierealizowalny w układzie (2) jest jednak tylko jeden kierunek zdefiniowany polem wektorowym $\boldsymbol{g}_{2s} = [0\ 0\ x_2]^T,\ \forall |x_2| < \infty$. Skoro w trakcie procesu orientowania pola $\boldsymbol{g}_2(x_2)$ jego kierunek nakładany jest na chwilowy kierunek wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$, to kierunek osobliwy $\boldsymbol{g}_{2s}$ odpowiadać będzie wektorom zbieżności z zerową pierwszą współrzędną: $\boldsymbol{h}_s = \{\boldsymbol{h} : h_1 = 0\}$ – kierunek ten również nazwiemy osobliwym. Zerowanie się składowej h_1 w wektorze $\boldsymbol{h}$ będzie skutkować w tym przypadku osobliwością sterowania. Problem osobliwości będzie rozważony w dalszej części artykułu.

4. PRAWO STEROWANIA

Biorąc pod uwagę (10) zaproponujmy następującą postać wektora zbieżności:

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_p\, e_1 + \dot{x}_{1t} \\ x_{2d} - x_2 \\ k_p\, e_3 + \dot{x}_{3t} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

[1] Trajektoria dopuszczalna spełnia ograniczenia postaci (5).

[2] Wyjaśnienie ustawicznego pobudzenia dla trajektorii referencyjnej zawarto w dalszej części pracy.

[3] Jak się okaże w dalszej części pracy, dystans ten jest odległością w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

[4] Zgodnie z (4) pierwsza składowa $\boldsymbol{g}_2(x_2)$ jest równa 1, lecz w rzeczywistości mamy dodatkowo możliwość wpływu na znak składowej pola $sgn(u_2)\boldsymbol{g}_2(x_2)$ poprzez znak sterowania u_2 (por. (3)).

gdzie $k_p > 0$ jest parametrem projektowym, a sygnał x_{2d} definiuje zadaną orientację (kierunek) pola wektorowego $\boldsymbol{g}_2(x_2)$:

$$x_{2d} \triangleq \frac{h_3}{h_1} \overset{(11)}{=} \frac{k_p\, e_3 + \dot{x}_{3t}}{k_p\, e_1 + \dot{x}_{1t}}, \qquad h_1 \neq 0. \tag{12}$$

Zgodnie z rozważaniami z poprzedniego punktu sterowanie u_1 winno gwarantować realizację zadanego kierunku pola $\boldsymbol{g}_2(x_2)$. Skoro kierunek ten jest definiowany przez (12), to propozycja sterowania orientującego jest następująca:

$$u_1 \triangleq k_1(x_{2d} - x_2) + \dot{x}_{2d}, \tag{13}$$

gdzie $k_1 > 0$ stanowi parametr projektowy oraz

$$\dot{x}_{2d} \overset{(12)}{=} \frac{\dot{h}_3 h_1 - h_3 \dot{h}_1}{h_1^2}, \tag{14}$$

gdzie (por. (11), (2) i (8)):

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= k_p\,(u_{2t} - u_2) + \ddot{x}_{1t}, & (15)\\ \dot{h}_3 &= k_p\,(x_{2t}u_{2t} - x_2 u_2) + \ddot{x}_{3t}. & (16) \end{aligned}$$

Zadaniem sterowania u_2 ma być popychanie podsystemu (6). Uwzględniając wcześniejsze rozważania, niech dział anie u_2 będzie proporcjonalnie do chwilowego rzutu wektora $\boldsymbol{h}^* = [h_1\ h_3]^T \in \mathbb{R}^2$ na bieżący kierunek pola $\boldsymbol{g}_2^*(x_2)$. Weźmy zatem:

$$u_2 \triangleq k_2\, \|\, \boldsymbol{h}^* \| \cos\alpha, \quad \cos\alpha \triangleq \frac{\boldsymbol{g}_2^{*T}\boldsymbol{h}^*}{\|\, \boldsymbol{g}_2^*\|\, \|\, \boldsymbol{h}^*\|}, \tag{17}$$

gdzie: $\alpha\angle(\boldsymbol{g}_2^*, \boldsymbol{h}^*)$ oraz

$$\begin{aligned} k_2 &\triangleq \frac{1}{\|\, \boldsymbol{g}_2^*\|} \overset{(7)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}, & (18)\\ \|\, \boldsymbol{h}^*\| &= \sqrt{h_1^2 + h_3^2}. & (19) \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że propozycję (17)-(18) daje się zapisać w prostszej postaci:

$$u_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2^{*T}\boldsymbol{h}^*}{1 + x_2^2}, \tag{20}$$

która jest dobrze określona także dla $\|\, \boldsymbol{h}^*\| = 0$.

Poniżej przedstawiona zostanie propozycja prawa stabilizacji trajektorii systemu (2) przy zał ożeniu, że wektor zbieżności nie przechodzi przez kierunek osobliwy: $\forall_{t\geqslant 0}:\ \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{h}_s$.

Propozycja 1 *Zakładając, że trajektoria referencyjna $\boldsymbol{x}_t(t)$ jest nieustannie pobudzająca, czyli:*

$$\forall_{t\geqslant 0}:\ \|\, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*\| = \sqrt{\dot{x}_{1t}^2 + \dot{x}_{3t}^2} \neq 0 \overset{(8)}{\Rightarrow} |u_{2t}| \neq 0, \tag{21}$$

zakładając ponadto ciągłość i ograniczoność sygnałów referencyjnych

$$x_{it} \in C^2,\ i = 1,2,3, \qquad u_{1t}, u_{2t} \in \mathcal{L}_\infty \tag{22}$$

oraz niezerową wartość pierwszej współrzędnej wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$:

$$\forall_{t\geqslant 0}:\ h_1 \neq 0, \tag{23}$$

prawo sterowania definiowane przez (13)-(19) zastosowane do systemu (2) gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia

$$\boldsymbol{e} = [e_1\ e_2\ e_3]^T \triangleq [x_{1t} - x_1 \quad x_{2t} - x_2 \quad x_{3t} - x_3]^T$$

do zera dla $t \to \infty$.

Dowód 1 *Rozważmy na początku zachowanie się błędu kierunku $e_{2d} = x_{2d} - x_2$ pola $\boldsymbol{g}_2^*(x_2)$. Podstawiając (13) do drugiego równania w (2) otrzymujemy:*

$$\dot{e}_{2d} + k_1 e_{2d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x_2 = x_{2d}. \tag{24}$$

Zatem sterowanie (13) gwarantuje nakładanie kierunku pola $\boldsymbol{g}_2$ na chwilowy kierunek wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$. Rozważmy teraz ewolucję błędu $\boldsymbol{e}^* = [e_1\ e_3]^T \triangleq \boldsymbol{x}_t^* - \boldsymbol{x}^*$. Bezpośrednie połączenie zależności:

$$\boldsymbol{h}^* \overset{(11)}{=} k_p\, \boldsymbol{e}^* + \dot{\boldsymbol{x}}_t^*, \tag{25}$$

oraz

$$\dot{\boldsymbol{e}}^* = \dot{\boldsymbol{x}}_t^* - \dot{\boldsymbol{x}}^* \tag{26}$$

daje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{\boldsymbol{e}}^* + k_p\, \boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{h}^* - \dot{\boldsymbol{x}}^*. \tag{27}$$

Wykonując elementarne obliczenia można pokazać, że prawdziwe są relacje (patrz Dodatek):

$$\|\, \boldsymbol{r}\|^2 = \|\, \boldsymbol{h}^*\|^2\, (1 - \cos^2\alpha), \tag{28}$$

$$\lim_{x_2 \to x_{2d}} (1 - \cos^2\alpha) = 0. \tag{29}$$

Zdefiniujmy następującą skalarną funkcję klasy K_∞ [19]:

$$V(\boldsymbol{e}^*) = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{e}^{*T}\boldsymbol{e}^*, \tag{30}$$

której pochodną wzdłuż trajektorii (27) można oszacować jak następuje:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{e}^{*T}\dot{\boldsymbol{e}}^* \overset{(27)}{=} \boldsymbol{e}^{*T}(-k_p\, \boldsymbol{e}^* + \boldsymbol{r}) = \\ &= -k_p\, \boldsymbol{e}^{*T}\boldsymbol{e}^* + \boldsymbol{e}^{*T}\boldsymbol{r} \leqslant \\ &\leqslant -k_p\, \|\, \boldsymbol{e}^*\|^2 + \|\, \boldsymbol{e}^*\|\, \|\, \boldsymbol{r}\| \overset{(28)}{=} \\ &\overset{(28)}{=} -k_p\, \|\, \boldsymbol{e}^*\|^2 + \|\, \boldsymbol{e}^*\|\, \|\, \boldsymbol{h}^*\|\, \gamma \leqslant \\ &\leqslant -k_p\, \|\, \boldsymbol{e}^*\|^2 + \|\, \boldsymbol{e}^*\|\, (k_p\, \|\, \boldsymbol{e}^*\| + \|\, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*\|)\gamma \end{aligned}$$

gdzie: $\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \leqslant 1\ \forall_{\alpha \in T^1}$. Zatem ostatecznie:

$$\dot{V} \leqslant -W(\boldsymbol{e}^*, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*, \gamma), \tag{31}$$

gdzie ciągła funkcja:

$$W(\boldsymbol{e}^*, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*, \gamma) = k_p(1-\gamma)\, \|\, \boldsymbol{e}^*\|^2 - \|\, \boldsymbol{e}^*\|\, \|\, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*\|\, \gamma \tag{32}$$

jest dodatnio określona dla

$$\|\, \boldsymbol{e}^*\| > \Gamma, \quad \Gamma = \frac{\gamma\, \|\, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*\|}{k_p(1-\gamma)}. \tag{33}$$

Zgodnie z twierdzeniam La Salla-Yoshizawy[5] *[19] zachodzi*[6]*:*

$$\forall_{\|e^*\|>\Gamma} : \lim_{t\to\infty} W \to 0_+ \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|e^*\| \to \Gamma_+. \quad (34)$$

Zatem $\|e^*\|$ *nie wzrasta dla* $\gamma < 1$*. Co więcej, na podstawie (24) i (29) mamy:*

$$\lim_{t\to\infty} \gamma = 0 \overset{(33)}{\Rightarrow} \lim_{t\to\infty} \Gamma = 0 \overset{(34)}{\Rightarrow} \lim_{t\to\infty} \|e^*\| = 0. \quad (35)$$

Z definicji (11), (12) i (8) oraz z wniosku (24) wynika, że:

$$\lim_{e^*\to 0} x_{2d} = x_{2t} \Rightarrow \lim_{x_2\to x_{2d}, e^*\to 0} x_2 = x_{2t}. \quad (36)$$

Zatem ostatecznie wnioskuje się, że

$$\lim_{t\to\infty} e_2 = 0 \quad (37)$$

i tym samym uchyby $e = [e_1\ e_2\ e_3]^T$ *zmierzają jednostajnie asymptotycznie do zera dla* $t \to \infty$ *i* $h_1 \neq 0$*. Z założeń (22) i (23) oraz równań (13), (20), (14), (11), (36), (37) oraz (8) wynika, że sterowania* u_1, u_2 *są ciągłe i ograniczone oraz:* $\lim_{t\to\infty} u_i = u_{it}$, $i = 1, 2$. □

Uwaga 1 Powyższe rozważania pokazują asymptotyczną zbieżność błędu e^* do zera nie dając żadnej informacji o szybkości tej zbieżności. Jak pokażą wyniki symulacyjne, w istocie zbieżność ta jest szybka, a wskazywać na ten fakt może bezpośrednia analiza równania (27). Mianowicie, skoro prawa strona równania różniczkowego w (27) zmierza do zera dowolnie szybko (zgodnie z (24) i (29)), to ewolucja błędu e^* jest zbliżona do dynamiki pierwszego rzędu z zerową prawą stroną równania[7] (27).

Uwaga 2 Proponowane wyżej prawo sterowania staje się osobliwe, gdy w trakcie ewolucji sterowanego systemu (2) wymagane jest przejście przez kierunek osobliwy $h_s = \{h : h_1 = 0\}$. Wówczas sygnał zadany x_{2d} z (12), a tym samym sterowanie u_1 z (13) stają się nieograniczone. Zdefiniujmy pewien obszar w przestrzeni błędu e_1:

$$D = \{e_1 : (e_1 u_{2t} < 0) \wedge (k_p |e_1| > |u_{2t}|)\}. \quad (38)$$

Zgodnie z definicją (11) $h_1 = k_p e_1 + \dot{x}_{1t}$, a warunki dostateczne na przejście przez osobliwość $h_1 = 0$ można określić następująco:

$$e_1 \in D \Rightarrow \exists_{\bar{t}<\infty} : h_1(\bar{t}) = 0. \quad (39)$$

Problem osobliwości można rozwiazać w jeden z następujących sposobów:
a) poprzez unikanie osobliwości – postać pierwszego równania w (2) pozwala na zastosowanie chwilowo takiego sterowania $u_2 = \overline{u}_2$, by wyprowadzić e_1 z obszaru D,
b) poprzez modyfikację pewnych sygnałów w pobliżu osobliwości tak, aby współrzędna h_1 wektora zbieżności przeszła w sposób ciągły przez punkt osobliwy, a sygnały zmodyfikowane *przeskoczyły* punkt osobliwy [8].
Oba sposoby uchylają własność ciągłości sterowań u_1, u_2 na rzecz ciągłości odcinkami.

[5]Funkcja (30) spełnia warunek twierdzenia La Salla-Yoshizawy [19] postaci: $\gamma_1(\|e^*\|) \leqslant V(e^*) \leqslant \gamma_2(\|e^*\|)$, dla $\gamma_1(\|e^*\|) = \gamma_2(\|e^*\|) = V(e^*)$, gdyż (30) jest funkcją klasy K_∞.

[6]Zgodnie z (24) i (29) istnieje skończona chwila $t_\gamma < \infty$ taka, że $\forall_{t\geqslant t_\gamma} : 0 < \gamma < 1 \Rightarrow \forall_{t\geqslant t_\gamma} : \Gamma < \infty$.

[7]Zakładając brak przejścia przez osobliwość.

5. WYNIKI SYMULACYJNE

Jakość działania zaproponowanego prawa sterowania pokazują uzyskane wyniki symulacyjne wykonane dla dyskretnej dziedziny czasu w horyzoncie $\tau = 20[s]$ ze stałym okresem próbkowania $T_p = 0.005[s]$ dla warunków początkowych: $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ x_{1t}(0) = -6.1,\ x_{2t}(0) = -2.5,\ x_{3t}(0) = 7.1$. Podczas symulacji przyjęto następujące wartości parametrów: $k_p = 5,\ k_1 = 5$. Trajektoria referencyjna wynikała z numerycznego całkowania równań (8) ze stałym okresem próbkowania $T_p = 0.005[s]$ dla sterowań referencyjnych $u_{1t} = \sin 0.5t,\ u_{2t} = -0.7$.

Rys. 1 do 3 przedstawiają uzyskane przebiegi dla przypadku nieprzechodzenia przez kierunek osobliwy. Na uwagę zasługuje szybka zbieżność błędów śledzenia do zera oraz ograniczoność i mały koszt energetyczny sterowań (ewolucja systemu w stanach przejściowych nie wykazuje oscylacji). Należy zauważyć, iż kierunek pola g_2 został w przybliżeniu nałożony na kierunek wektora zbieżności h już po około $t = 0.2[s]$ (rys.2), zatem przed osiagnięciem przez błędy śledzenia otoczenia zera (rys.1), co potwierdza zasadność strategii sterowania przedstawionej w rozdziale 3.. Wartość $\cos\alpha$ zmierza asymptotycznie do -1 ze względu na strategię *popychania w tył* (ruchu *do tyłu*) przyjętą dla systemu referencyjnego (sterowanie $u_{2t} < 0$).

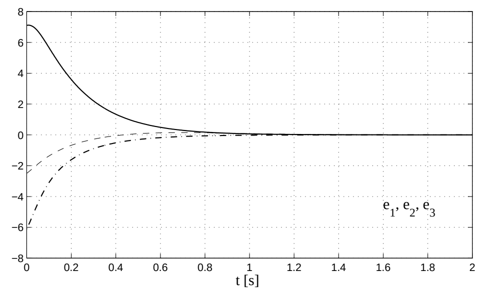
Przeprowadzono także symulacje dla przypadku, w którym wymagane jest przejście przez osobliwość $h_1 = 0$. Wszystkie wartości parametrów oraz sterowania referencyjne pozostały takie, jak w poprzednim przypadku. Zmianie uległy natomiast warunki początkowe, mianowicie: $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ x_{1t}(0) = 6.1,\ x_{2t}(0) = -2.5,\ x_{3t}(0) = 7.1$. Łatwo zauważyć, że błąd śledzenia $e_1(0)$ należy do obszaru D (definicja (38)). W celu przejścia przez osobliwość zastosowano algorytm tunelowy [8]: w otoczeniu osobliwości dla $|h_1| \leqslant \delta$ (gdzie $\delta = 0.9\,|u_{2t}| = 0.63$) przyjęto $x_{2d} = h_3/(-sgn(h_1(\bar{t}))\delta),\ \dot{x}_{2d} = \dot{h}_3/(-sgn(h_1(\bar{t}))\delta)$, gdzie

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{dla } x < 0, \end{cases} \quad (40)$$

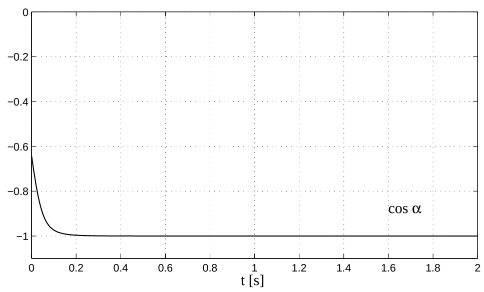
a $\bar{t}$ oznacza chwilę wejścia $|h_1|$ w tunel δ. Poza tunelem δ stosowano definicje wszystkich sygnałów, jak w przypadku bez osobliwości. Uzyskane wyniki przedstawiają rysunki 4 do 7. W przebiegach ograniczonych sygnałów sterujacych widać dwa punkty nieciągłości (rys.6) wynikające z przechodzenia składowej h_1 przez granice tunelu $\pm\delta$ (rys.7). Ostatecznie jednak cel sterowania został osiągnięty (również w tym przypadku zbieżność błędów jest szybka) – rys.4. Rys. 7 ukazuje zjawisko *przeskakiwania* przez sygnał x_{2d} punktu osobliwego $h_1 = 0$ przy jednoczesnym ciągłym przejściu h_1 przez punkt $h_1 = 0$.

6. PODSUMOWANIE

W artykule zaprezentowano prawo stabilizacji trajektorii wynikające z zastosowania metody orientowania pól



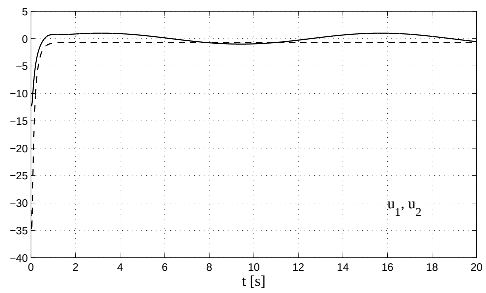
Rysunek 1. Skrócone przebiegi błędów śledzenia: e_1(-.-), e_2(- -), e_3(–) dla przypadku bez przejścia przez osobliwość $h_1 = 0$.



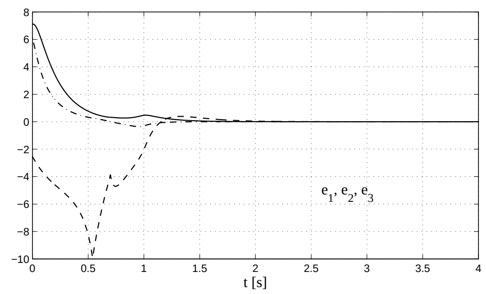
Rysunek 2. Skrócony przebieg $\cos\alpha$ dla przypadku bez przejścia przez osobliwość $h_1 = 0$.

wektorowych wprowadzonej w pracach [11, 12]. Metoda ta wykorzystuje geometryczną interpretację postaci i potencjalnej ewolucji modelu kinematyki rozważanego systemu. Stosowanie metody orientowania pól wektorowych do układów łańcuchowych wiąże się z występowaniem osobliwości ze względu na niepełną orientowalność pola-generatora $\boldsymbol{g}_2$. Wyniki symulacyjne pokazały efektywność proponowanego podejścia – dobrą jakość statyczną i dynamiczną procesu stabilizacji trajektorii w przypadku bez osobliwości. Zaproponowano również dwa ogólne sposoby rozwiązania problemu osobliwości, a skuteczność jednej z metod (zaczerpniętej z pracy [8]) potwierdzono wynikami symulacji.

Wydaje się, że metoda orientowania pól wektorowych stanowi pewne uogólnienie sterowania we współrzędnych biegunowych. Charakterystycznymi cechami prawa sterowania uzyskanego w oparciu o tę metodę są: prostota syntezy regulatora (strojeniu podlegają tylko dwa parametry k_p i k_1 odpowiadające za szybkość zbieżności odpowiednich błędów do zera), geometryczna interpretacja poszczególnych składników sterowania, *naturalny* ruch systemu w stanach przejściowych skutkujący stosunkowo małym kosztem energetycznym sterowań (w porównaniu do innych metod znanych z literatury). Zaproponowane sterowanie dla trójwymiarowego systemu łańcuchowego daje się bezpośrednio uogólnić na system czterowymiarowy (i więcej wymiarowy) lecz wraz ze wzrostem różnicy między liczbą zmiennych sterowanych a liczbą sterowań należy spodziewać się zwiększenia kosztu sterowania (zwłaszcza sterowania orientującego). Przyszłe prace skoncentrowane zostaną na próbie rozwiązania zadania stabilizacji w punkcie w oparciu o metodę orientownia pól wektorowych.



Rysunek 3. Przebiegi sygnałów sterujących: u_1(–), u_2(- -) dla przypadku bez przejścia przez osobliwość $h_1 = 0$.



Rysunek 4. Skrócone przebiegi błędów śledzenia: e_1(-.-), e_2(- -), e_3(–) z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$.

DODATEK

Wyprowadzenie zależności (28):

$$\boldsymbol{r} \overset{(27)}{=} \boldsymbol{h}^* - \dot{\boldsymbol{x}}^* \overset{(6)}{=} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} u_2 \overset{(17)}{=}$$

$$\overset{(17)}{=} \|\boldsymbol{h}^*\| \begin{bmatrix} \frac{h_1}{\|\boldsymbol{h}^*\|} - k_2\cos\alpha \\ \frac{h_3}{\|\boldsymbol{h}^*\|} - x_2 k_2 \cos\alpha \end{bmatrix} = \|\boldsymbol{h}^*\| \begin{bmatrix} r_{h1} \\ r_{h2} \end{bmatrix},$$

zatem

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{r}\|^2 &= \|\boldsymbol{h}^*\|^2 \left(r_{h1}^2 + r_{h2}^2\right) = \\ &= \|\boldsymbol{h}^*\|^2 \Big[1 + (1 + x_2^2)k_2^2\cos^2\alpha - \\ &- 2k_2\cos\alpha \frac{h_1 + h_3 x_2}{\|\boldsymbol{h}^*\|}\Big] \overset{(18)}{=} \\ &\overset{(18)}{=} \|\boldsymbol{h}^*\|^2 \left(1 + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha\right) = \\ &= \|\boldsymbol{h}^*\|^2 \left(1 - \cos^2\alpha\right). \end{aligned}$$

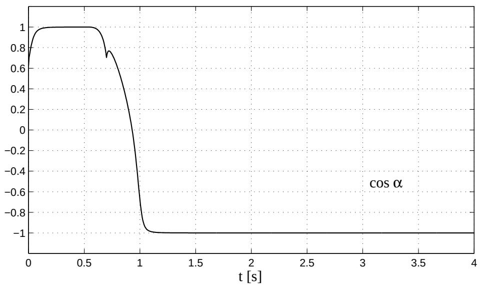
Wyprowadzenie zależności (29):

$$1 - \cos^2\alpha \overset{(17)}{=} 1 - \frac{(h_1 + h_3 x_2)^2}{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2)} =$$

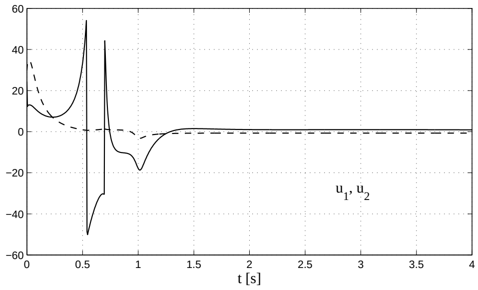
$$= \frac{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2) - h_1^2 - 2h_1 h_3 x_2 - h_3^2 x_2^2}{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2)} =$$

$$= \frac{(h_3 - h_1 x_2)^2}{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2)}.$$

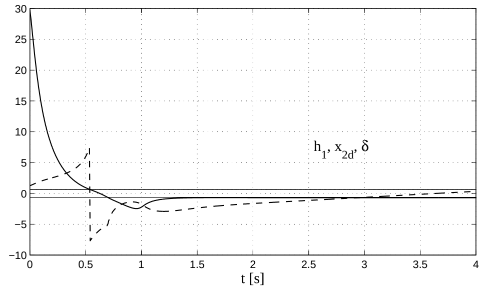
Dla $x_2 \to x_{2d}$ mamy $x_2 \overset{(12)}{\to} h_3/h_1$, co po podstawieniu do powyższej formuły daje wynik (29).



Rysunek 5. Skrócony przebieg $\cos \alpha$ z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$.



Rysunek 6. Skrócone przebiegi sygnałów sterujących: u_1(–), u_2(- -) z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$.



Rysunek 7. Skrócone przebiegi następujących sygnałów: h_1(–), x_{2d}(- -) z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$. Zaznaczono tunel $\pm\delta$ w pobliżu osobliwości.

TRACKING CONTROL WITH VECTOR FIELD ORIENTATION FOR 3-D CHAINED SYSTEM

Abstract: The article presents a proposition for solving a trajectory tracking task for the 3-D nonholonomic chained system. The control design methodology (*vector fi eld orientation method* [11, 12]) comes from a simple analysis of vector fields (generators) of the considered kinematics and from a geometrical interpretation of the system evolution. The control strategy description and simulation results are included in the paper.

Literatura

[1] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, A. Balestrino. Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2:27–35, 1995.

[2] A. Astolfi. *Asymptotic stabilization of nonholonomic systems with discontinuous control*. Praca doktorska, Swiss Federal Intitute of Technology, Zurich, 1995.

[3] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*. Systems and Control. Springer, New York, 2003.

[4] R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. R. W. Brockett, R. S. Millman, H. H. Sussmann, redaktorzy, *Differential Geometric Control Theory*, strony 181–191. Birkhauser, Boston, 1983.

[5] B. d'Andrea Novel, G. Campion, G. Bastin. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. *International Journal of Robotics Research*, strony 543–559, 1995.

[6] C. Canudas de Wit, H. Khennouf, C. Samson, O. J. Sørdalen. Nonlinear control design for mobile robots. Y.F. Zheng, redaktor, *Recent Trends in Mobile Robots*, wolumen 11, rozdział 5, strony 121–156. World Scientific, Singapore, 1993.

[7] W. E. Dixon, A. Behal, D. M. Dawson, S. P. Nagarkatti. *Nonlinear control of engineering systems. A Lyapunov-based approach.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[8] I. Dulęba. *Metody i algorytmy planowania ruchu robotów mobilnych i manipulacyjnych.* Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2001.

[9] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, T. Noguchi. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 384–389, Maj 1990.

[10] I. Kolmanowsky, N. H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems*, strony 20–36, Grudzień 1995.

[11] M. Michałek, K. Kozłowski. Sterowanie nieholonomicznym robotem mobilnym metodą orientowania pola wektorowego. *VIII Krajowa Konferencja Robotyki*, 2004.

[12] M. Michałek, K. Kozłowski. Tracking controller with vector field orientation for 3-D nonholonomic manipulator. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 181–189, Puszczykowo, 2004.

[13] P. Morin, C. Samson. Feedback control of nonholonomic wheeled vehicles. A survey. K. Kozłowski, K. Tchoń, redaktorzy, *Archives of Control Sciences*, wolumen 12(XLVIII), strony 7–36. Silesian University of Technology, 2002.

[14] P. Morin, C. Samson. Practical stabilization of drifless systems on Lie groups: The transverse function approach. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 48(9):1496–1508, 2003.

[15] P. Morin, C. Samson. Trajectory tracking for nonholonomic vehicles: overview and case study. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 139–153, Puszczykowo, 2004.

[16] G. Oriolo, A. De Luca, M. Venditteli. WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation and experimental validation. *IEEE Transactions On Control System Technology*, strony 835–852, Listopad 2002.

[17] O. J. Sørdalen, Y. Nakamura, W. J. Chung. Control of a nonholonomic manipulator. L. Sciavicco, C. Bonivetto, F. Nicolo, redaktorzy, *Robot Control 1994*, strony 279–284. Pergamon, Capri, Italy, 1994.

[18] K. Tchoń, M. Kabała, M. Wnuk. Algorytm śledzenia trajektorii robota mobilnego mk. *XIV Krajowa Konferencja Automatyki*, strony 663–668, Zielona Góra, 2002.

[19] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne. Modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.