Generator sygnałów referencyjnych dla zadania podążania wzdłuż ścieżki w ramach metodyki krzywych poziomicowych

T. Gawron, M. M. Michałek

25 października 2018

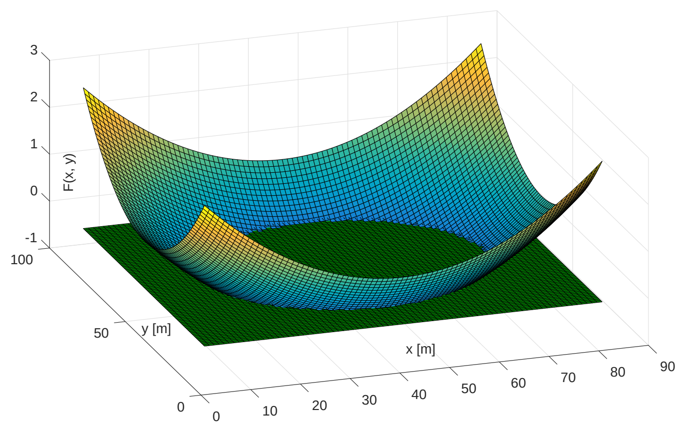
W odróżnieniu od zadania śledzenia trajektorii, w przypadku zadania podążania wzdłuż ścieżki chwilowy punkt referencyjny, względem którego obliczane są uchyby nie jest bezpośrednio funkcją czasu, a zależy od bieżącej konfiguracji $\boldsymbol{q} = [\theta\ x\ y]^\top$ robota. Klasyczne podejście do zadania odtwarzania ścieżki (patrz str. 82-85 skryptu) polega na wyznaczaniu takiego chwilowego punktu referencyjnego leżącego na odtwarzanej ścieżce, który jest najbliższy aktualnej pozycji robota (wynika on zatem z ortogonalnego rzutu pozycji robota na ścieżkę). Takie podejście posiada jednak istotne ograniczenia:

- analityczne wyznaczenie pozycji punktu referencyjnego jest możliwe jedynie w przypadku niektórych elementarnych krzywych (np. okrąg, prosta),
- punkt referencyjny może zostać wyznaczony w sposób jednoznaczny, gdy pozycja robota znajduje się w dostatecznie małym otoczeniu ścieżki referencyjnej; rozmiar tego otoczenia zależy od maksymalnej krzywizny ścieżki referencyjnej (sterowniki oparte o tak wyznaczony punkt referencyjny są więc w konsekwencji algorytmami lokalnymi).

Alternatywnym, wolnym od powyższych ograniczeń podejściem jest metodyka tzw. *krzywych poziomicowych*, w której chwilowy punkt referencyjny na ścieżce nie jest wyznaczany. W tym przypadku bowiem ścieżkę referencyjną reprezentuje się w postaci zbioru pozycji referencyjnych $\bar{\boldsymbol{q}}_d$, mianowicie

$$S_d \triangleq \left\{ \bar{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{q}}_d : F(\bar{\boldsymbol{q}}_d) \triangleq \sigma f(\bar{\boldsymbol{q}}_d) = 0 \right\}, \qquad \bar{\boldsymbol{q}}_d = [x_d\ y_d]^\top \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

gdzie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją decydującą o kształcie ścieżki referencyjnej, a $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem skalującym (parametrem projektowym) decydującym o kierunku odtwarzania ścieżki (np. kierunek zgodny lub niezgodny z ruchem wskazówek zegara) oraz o stromości funkcji F wokół ścieżki. Jak widać ze wzoru (1) ścieżka referencyjna dana jest w sposób niejawny (uwikłany). Jest ona zerową krzywą poziomicową (z ang. *zero-level curve*) funkcji $F(\bar{\boldsymbol{q}})$, czyli gęstym zbiorem punktów, w których funkcja ta przyjmuje wartość zerową. Funkcję $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ można zilustrować jako pewną powierzchnię w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której przekrój (tj. zbiór wspólny) z płaszczyzną $z = 0$ określa ścieżkę referencyjną.



Rysunek 1: Powierzchnia reprezentująca funkcję $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ dla ścieżki w postaci elipsy.

Powyższa reprezentacja ścieżki ma następujące właściwości:

- znak wartości funkcji $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ zależny jest od tego, po której stronie ścieżki znajduje się robot, natomiast $|F(\bar{\boldsymbol{q}})|$ można interpretować jako pewną nieeuklidesową miarę odległości robota od ścieżki referencyjnej,
- gradient ∇F funkcji F jest wektorem prostopadłym do jej poziomicy; wektor normalny do ∇F jest styczny do poziomicy funkcji F a tym samym do ścieżki referencyjnej, która jest poziomicą zerową funkcji F.

Funkcja $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ musi spełniać następujące założenia:

A1: $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ jest klasy C^2, czyli jest dwukrotnie różniczkowalna względem swojego argumentu,

A2: gradient funkcji $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ musi być niezerowy i ograniczony, tj.

$$\forall \bar{\boldsymbol{q}} \quad ||\nabla F(\bar{\boldsymbol{q}})|| \in [\underline{m}, \bar{m}], \tag{2}$$

gdzie $0 < \underline{m} < \bar{m} < \infty$.

Ze względu na powyższe założenia, funkcję $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ definiuje się często tylko dla pewnego podzbioru pozycji $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, w którym możliwe jest spełnienie założeń A1-A2 (tj. dla $\bar{\boldsymbol{q}} \in \mathcal{D}$). W takim przypadku prawa sterowania wykorzystujące metodykę krzywych poziomicowych będą również miały charakter lokalny.

Wybrane przykłady ścieżek elementarnych, które można reprezentować funkcją $F(\bar{\boldsymbol{q}}) = 0$:

- okrąg, elipsa: $F(\bar{\boldsymbol{q}}) = \sigma \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right]$,
- linia prosta: $F(\bar{\boldsymbol{q}}) = \sigma \left[y - ax - b \right]$,
- krzywa S-kształtna: $F(\bar{\boldsymbol{q}}) = \sigma \left[y - a \tanh(bx) \right]$,
- superelipsa: $F(\bar{\boldsymbol{q}}) = \sigma \left[\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n - 1 \right], \ n > 2$

przy czym $a, b \in \mathbb{R}$ są parametrami projektowymi ścieżki.

Zgodnie z powyższymi rozważaniami, wyjściem generatora sygnałów referencyjnych dla zadania odtwarzania ścieżki w metodyce krzywych poziomicowych jest następujący zbiór $\mathcal{F}$ wartości funkcji F i jej pochodnych zwartościowanych w bieżącej pozycji robota $\bar{\boldsymbol{q}}$:

$$\mathcal{S}_F \triangleq \{F(\bar{\boldsymbol{q}}),\ F_x(\bar{\boldsymbol{q}}),\ F_y(\bar{\boldsymbol{q}}),\ F_{xx}(\bar{\boldsymbol{q}}),\ F_{yy}(\bar{\boldsymbol{q}}),\ F_{xy}(\bar{\boldsymbol{q}})\},$$

gdzie

$$F_x \triangleq \frac{\partial F}{\partial x} \quad F_y \triangleq \frac{\partial F}{\partial y} \quad F_{z_1 z_2} \triangleq \frac{\partial F}{\partial z_1 \partial z_2} \quad ,$$

przy czym $z_1, z_2 \in \{x, y\}$ oraz $F_{xy} \equiv F_{yx}$.