

Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki (IAR)
Politechnika Poznańska (PP)
opracowanie: Maciej M. Michałek

C1 PODSTAWOWA ANALIZA SYGNAŁÓW

Ćwiczenie jest poświęcone podstawowym sposobom analizy właściwości sygnałów (deterministycznych oraz losowych) w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości. Z punktu widzenia problemu identyfikacji systemu umiejętność numerycznego sprawdzania właściwości sygnałów wraz z ich poprawną interpretacją stanowi istotny element projektowania eksperymentu identyfikacyjnego oraz umożliwia wykorzystanie klasycznych nieparametrycznych metod identyfikacji takich, jak analiza korelacyjna i analiza widmowa.

Rozważać będziemy sygnały zdefiniowane w różnych dziedzinach czasu. Sygnał x określony w ciągłej dziedzinie czasu (sygnał analogowy) oznaczmy symbolem $x(t)$ dla $t \in [0; \infty)$. Jego wersję spróbkowaną w czasie oznaczmy symbolem $x(nT_p)$ (lub alternatywnie $x(t_n)$), gdzie $T_p > 0$ jest okresem próbkowania, natomiast $n = 0, 1, \dots$ jest numerem próbki ($n \in \mathbb{N}$). Opis w postaci ciągu czasowego $x(n)$, dla $n = 0, 1, \dots$, zakłada albo znormalizowany okres próbkowania $T_p = 1$ w sygnale $x(nT_p)$, albo zakłada pewien domyślny (znany z góry ale niespecyfikowany) stały interwał czasu T_p między próbkami o numerach $0, 1, 2, \dots$. Sekwencja $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ (lub $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$) będzie oznaczać skończony uporządkowany zbiór próbek ciągu $x(n)$ (lub sygnału czasu dyskretnego $x(nT_p)$) wynikający ze skończonego horyzontu obserwacji/pomiaru tego ciągu (sygnału) dla przedziału numerów próbki $n \in [0; N - 1]$.

Procesem stochastycznym czasu dyskretnego nazywać będziemy uporządkowany ciąg (sekwencję) zmiennych losowych

$$\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{X(0), X(1), X(2), \dots\} \quad (1)$$

parametryzowanych czasem dyskretnym n , w którym zmienna losowa $X(n)$, dla każdego ustalonego $n \in \{0, 1, \dots\}$, jest funkcją tzw. zdarzenia elementarnego i przyjmuje wartości z pewnego zbioru (np. ze zbioru \mathbb{R}) z pewnym prawdopodobieństwem wynikającym z rozkładu prawdopodobieństwa rządzącego zachowaniem zmiennej $X(n)$. Skończona sekwencja wartości $\{x_i(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{x_i(0), x_i(1), \dots, x_i(N-1)\}$ reprezentuje pojedynczą i -tą realizację procesu stochastycznego (1), odpowiadająca i -temu zdarzeniu elementarnemu, w skończonym interwale $n \in [0; N - 1]$ – jest to zbiór konkretnych wartości przyjętych przez poszczególne zmienne losowe $X(n)$ dla $n \in [0; N - 1]$. Dla naszych celów będziemy mówić, że $\{x_i(n)\}_{n=0}^{N-1}$ jest skończoną sekwencją próbek **sygnału stochastycznego** $x(n)$. Przykładem procesu stochastycznego może być natężenie hałasu mierzone co godzinę każdej doby w pewnym pomieszczeniu. Wówczas $N = 24$ oraz przykładowo $X(5)$ jest natężeniem hałasu w piątej godzinie doby, natomiast $\{x_2(n)\}_{n=0}^{23}$ oznacza zbiór dwudziestu czterech wartości pomiarów natężenia hałasu wykonanych co godzinę w ciągu drugiej doby.

Jeżeli wartości oczekiwane $E[X(n)]$ i wariancje $\text{Var}[X(n)]$ wszystkich zmiennych losowych procesu stochastycznego (1) są takie same i nie zależą od chwili czasu $n \in [0; N - 1]$, a także funkcja autokorelacji $E[X(n)X(n - \tau)]$ procesu stochastycznego (1) dla różnych interwałów przesunięcia $\tau \in \mathbb{N}$ nie zależy od chwili n to mówimy, że proces stochastyczny (1) jest **stacjonarny w szerszym sensie** (lub dla naszych potrzeb krótko: stacjonarny).

Stacjonarny proces stochastyczny (1) będziemy nazywać **ergodycznym** (względem momentów pierwszego i drugiego rzędu) jeżeli estymaty wartości oczekiwanej i funkcji korelacji zmiennych losowych $X(n)$, $n \in [0; N - 1]$, zarówno liczone po czasie dla pojedynczej i -tej realizacji procesu stochastycznego $\{x_i(n)\}_{n=0}^{N-1}$ jak i liczone po zbiorze M realizacji $\{x_i(n)\}_{n=0}^{N-1}$ dla $i = 1, \dots, M$ zbiegają asymptotycznie, tj. dla $N \rightarrow \infty$ i $M \rightarrow \infty$, z prawdopodobieństwem

jeden odpowiednio do $E[X(n)]$ oraz $E[X(n)X(n - \tau)]$. Ergodyczność procesu stochastycznego bardzo ułatwia praktyczne obliczanie estymat parametrów statystycznych takiego procesu, ponieważ w praktyce zwykle dysponujemy tylko jedną jego realizacją w postaci skończonej sekwencji wartości sygnału stochastycznego.

Szumem białym w dziedzinie czasu dyskretnego n będziemy nazywać stacjonarny (w sensie powyższej definicji) proces stochastyczny o zerowej wartości oczekiwanej, dla którego zmienne losowe ciągu (1) mają skończoną wariancję i są statystycznie niezależne (i tym samym nieskorelowane ze sobą). Niektórzy autorzy przy określaniu białego szumu narzucają dodatkowy wymóg jednakowego rozkładu prawdopodobieństwa dla wszystkich zmiennych losowych ciągu (1). Sygnał będący realizacją szumu białego (w skrócie nazywany wprost szumem białym), jest bardzo ważnym sygnałem teoretycznym, który ma następujące właściwości:

- w dziedzinie czasu dyskretnego n zmienne losowe odpowiadające wartościom $e(n_1)$ i $e(n_2)$ realizacji szumu białego są nieskorelowane dla dowolnych $n_1 \neq n_2$; tym samym funkcja autokorelacji szumu białego ma postać $r_{ee} = \sigma_e^2 \delta(n)$, gdzie $\sigma_e^2 > 0$ jest skończoną wariancją szumu, a $\delta(n)$ jest deltą Kroneckera,
- gęstość widmowa mocy skończonej sekwencji próbek $\{e(n)\}_{n=0}^{N-1}$ szumu białego zawiera niezerowe składowe częstotliwościowe dla wszystkich dyskretnych pulsacji unormowanych $\Omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, \dots, N-1$; składowe te mają jednakową amplitudę proporcjonalną do wariancji σ_e^2 .

Przymiotnik *biały* w nazwie szumu jest nawiązaniem do światła białego, które jest mieszaniną fal elektromagnetycznych o wszystkich częstotliwościach z zakresu widzialnego. Szum biały nie występuje w praktyce, ale można wygenerować sekwencje próbek sygnałów (pseudo) stochastycznych o właściwościach bardzo zbliżonych do tych wymienionych powyżej. W środowisku Matlab-Simulink istnieje blok o nazwie **Band-Limited White Noise**, który umożliwia generację próbek sygnału imitującego szum biały.

W literaturze mówi się także o **szumie kolorowym** czyli takim procesie stochastycznym, którego zmienne losowe w ciągu (1) są ze sobą w pewien sposób skorelowane, a w dziedzinie częstotliwości taki sygnał nie zawiera składowych z pewnych zakresów pulsacji. Szumy kolorowe są sygnałami występującymi w praktyce. I tak, *szum czerwony* jest sygnałem dolnopasmowym (zawiera głównie składowe niskoczęstotliwościowe), natomiast *szum niebieski* jest sygnałem górnopasmowym (zawiera głównie składowe wysokoczęstotliwościowe). Często przyjmuje się, że szum kolorowy jest wynikiem liniowej filtracji $v(n) = H(q^{-1})e(n)$ szumu białego $e(n)$.

1 Analiza sygnałów w dziedzinie czasu

Oszacowane wartości parametrów statystycznych na podstawie N -elementowej próby pomiarowej nazywamy **estymatami** (lub ocenami), a funkcje odwzorowujące zbiór wartości z próby N -elementowej w estymatę nazywamy **estymatorami**. Przypomnijmy definicje podstawowych parametrów statystycznych rozkładu zmiennych losowych tworzących proces losowy oraz estymatorów tych parametrów z próby N -elementowej.

– **Wartość oczekiwana** (estymator – średnia arytmetyczna):

$$m_n \triangleq E[X(n)], \quad \hat{m}_n = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(n), \quad \hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n), \quad (2)$$

gdzie $X(n)$ oznacza zmienną losową związaną z chwilą n , m_n jest teoretyczną wartością oczekiwaną tej zmiennej losowej, \hat{m}_n jest estymatorem wartości oczekiwanej zmiennej losowej $X(n)$ liczoną po zbiorze jej M realizacji, natomiast \hat{m} jest estymatorem wartości oczekiwanej procesu losowego (1) liczoną po czasie na podstawie **pojedynczej** realizacji $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ tego procesu w interwale czasowym od zera do $N-1$. Jeżeli proces losowy jest ergodyczny, to estymatory \hat{m}_n oraz \hat{m} są asymptotycznie równoważne. Parametr m_n określa wartość, wokół której

skupiają się realizacje zmiennej losowej $X(n)$. Wykorzystanie estymatora \hat{m} do okresowego sygnału deterministycznego pozwala na obliczenie jego wartości średniej za okres.

– **Wariancja** (estymator – wariancja empiryczna):

$$\sigma_n^2 \triangleq E[(X(n) - m_n)^2], \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [x_i(n) - \hat{m}_n]^2, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}]^2, \quad (3)$$

gdzie $X(n)$ oznacza zmienną losową związaną z chwilą n , σ_n^2 jest teoretyczną wariancją tej zmiennej losowej, $\hat{\sigma}_n^2$ jest estymatorem wariancji zmiennej losowej $X(n)$ liczonym po zbiorze jej M realizacji natomiast $\hat{\sigma}^2$ jest estymatorem wariancji procesu losowego (1) liczonym po czasie na podstawie pojedynczej realizacji $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ tego procesu w interwale czasowym od zera do $N-1$. Jeżeli proces losowy jest ergodyczny, to estymatory $\hat{\sigma}_n^2$ oraz $\hat{\sigma}^2$ są asymptotycznie równoważne¹. Parametr σ_n^2 określa rozrzut wartości, które może przyjmować zmienna losowa $X(n)$ wokół wartości m_n .

– **Funkcja autokorelacji i korelacji wzajemnej** (estymator funkcji korelacji):

$$r_{xx}(\tau) \triangleq E[X(n)X(n-\tau)], \quad \hat{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=\tau}^{N-1} x(n)x(n-\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (4)$$

$$r_{xy}(\tau) \triangleq E[X(n)Y(n-\tau)], \quad \hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=\tau}^{N-1} x(n)y(n-\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (5)$$

gdzie \hat{r}_{xx} i \hat{r}_{xy} są estymatorami, odpowiednio, funkcji autokorelacji² sygnału x i korelacji wzajemnej sygnałów x i y liczonymi po czasie na podstawie pojedynczych realizacji $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ i $\{y(n)\}_{n=0}^{N-1}$ procesów w interwale czasowym od zera do $N-1$. Warto podkreślić, że we wzorze (5) należy opóźniać w czasie ($\tau > 0$) zawsze **drugi** z sygnałów występujących w indeksie r_{xy} (lub inaczej: przyspieszać pierwszy z sygnałów występujących w indeksie r_{xy}). Jeżeli we wzorach (4)-(5) zamiast wartości próbek sygnałów x i y weźmiemy do obliczeń wartości z odjętą średnią, tj. $\bar{x} = x - \hat{m}_x$, $\bar{y} = y - \hat{m}_y$, wówczas mówimy o **funkcjach kowariancji** c_{xx} , c_{xy} .

W ujęciu deterministycznym funkcja r_{xx} stanowi miarę podobieństwa danego sygnału i jego przesuniętej w czasie kopii (lub podobieństwa dwóch różnych sygnałów, gdy mówimy o r_{xy}). W przypadku sygnałów deterministycznych funkcja r_{xx} pozwala na badanie powtarzalności (okresowości) sygnału $x(n)$. W przypadku sygnałów losowych funkcje korelacji wyjaśniają w jaki sposób analizowane sygnały są ze sobą skorelowane (zależą od siebie).

Funkcje korelacji mają następujące właściwości:

W1. $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$, $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$ (wersje dla funkcji o wartościach ze zbioru \mathbb{R}),

W2. $\forall \tau \quad |r_{xx}(\tau)| \leq r_{xx}(\tau = 0)$,

W3. $r_{ee}(\tau = 0) = \sigma^2$, $r_{ee}(\tau \neq 0) = 0$, gdy e reprezentuje szum biały.

Zauważmy, że na podstawie własności W1 i przy założeniu operacji na wartościach ze zbioru liczb rzeczywistych możemy zapisać:

$$\hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=\tau}^{N-1} x(n)y(n-\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\tau} y(n)x(n+\tau) = \hat{r}_{yx}(-\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (6)$$

Funkcję $\mathcal{P}_N(X_1, \dots, X_N)$, której argumentami są zmienne losowe X_1, \dots, X_N , a wartość $\hat{p} = \mathcal{P}_N(x_1, \dots, x_N)$ jest oszacowaniem (estymatą) nieznannej wartości pewnego prawdziwego parametru p_0 , nazywamy estymatorem parametru p_0 . Skoro estymator \mathcal{P}_N jest funkcją zmiennych losowych X_1, \dots, X_N , to sam staje się także zmienną losową. W efekcie możemy określić zarówno wartość oczekiwaną jak i wariancję samego estymatora \mathcal{P}_N . Zatem jeżeli:

¹Aby uzyskać estymatory nieobciążone dla σ_n^2 należy odpowiednie sumy podzielić przez $M-1$ i $N-1$.

²W celu ograniczenia obciążenia estymatora funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej odpowiednie sumy w (4)-(5) dzieli się przez wartość $N-\tau$ odpowiadającą liczbie sumowanych próbek zamiast przez liczbę N wszystkich próbek zawartych w sekwencji danych.

- $\forall N \ E[\mathcal{P}_N] = p_o$ wówczas \mathcal{P}_N jest **nieobciążony**,
- $\text{plim}_{N \rightarrow \infty} E[\mathcal{P}_N] = p_o$ wówczas \mathcal{P}_N jest **asymptotycznie nieobciążony**,
- $\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_N = p_o$ wówczas \mathcal{P}_N jest **zgodny**,
- $\forall N \ E[\mathcal{P}_N^*] = p_o \ \wedge \ \text{Var}[\mathcal{P}_N^*] = \min_{\mathcal{P}_N} \text{Var}[\mathcal{P}_N]$ wówczas \mathcal{P}_N^* jest **najefektywniejszy** spośród wszystkich możliwych estymatorów \mathcal{P}_N .

Właściwości estymatora zależą od postaci funkcji \mathcal{P}_N . Estymator nieobciążony jest korzystniejszy od estymatora tylko asymptotycznie nieobciążonego, ponieważ ten drugi (aby ujawnić własność nieobciążenia) wymaga w praktyce użycia nieskończonej licznej próby pomiarowej. Obciążenie estymatora oznacza, że średnia wartość zwracana przez estymator przy powtarzaniu procedury estymacji dla wszystkich możliwych zbiorów danych pomiarowych nie jest równa wartości prawdziwej p_o , a jest ona odsunięta od p_o o pewien niezerowy interwał $|b|$, przy czym $b \triangleq E[\mathcal{P}_N] - p_o$. Estymator zgodny zwraca estymatę \hat{p} , która zbliża się do wartości p_o , gdy jest wyznaczana dla liczby N pomiarów zmierzającej do nieskończoności (mówimy o zbieżności do wartości p_o z prawdopodobieństwem równym jeden lub wg prawdopodobieństwa). Estymator najefektywniejszy jest z definicji nieobciążony i ma najmniejszą wariancję, co w praktyce oznacza, że rozrzut estymat \hat{p} (wokół wartości oczekiwanej równej p_o) zwracanych przez estymator \mathcal{P}_N dla różnych zbiorów pomiarów jest najmniejszy. Najkorzystniejszymi (z punktu widzenia identyfikacji) estymatorami do szacowania wartości parametru p_o są estymatory najefektywniejsze lub zgodne.

1.1 Porównanie szumów białego i kolorowego. Stosując schemat blokowy `NoiseComparison.mdl` jakościowo porównać przebiegi szumu białego $e(n)$ oraz filtrowanego szumu białego czyli szumu kolorowego $v(n)$ (przyjąć okres próbkowania $T_p = 1$ s oraz horyzont czasowy symulacji $NT_p = 1000$ s).

- Porównać przebiegi szumu białego dla różnych jego wariancji (parametr `Noise Power` w bloku generatora szumu `Band-Limited White Noise`).
- Numerycznie oszacować wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe szumu białego w każdym przypadku (do tego celu wykorzystać narzędzie dostępne w menu okna graficznego: `Tools/Data Statistics`). Porównać uzyskane wyniki z wartościami z generatora szumu.

1.2 Stacjonarność i ergodyczność procesu losowego. Zbiór `StochasticProcess.mat` zawiera 500 wygenerowanych sekwencji próbek $\{x_i(n)\}_{n=0}^{1000}$, $i = 1, 2, \dots, 500$, realizacji procesu losowego (szumu białego o wariancji $\sigma^2 = 0.1$) ułożonych wierszowo w macierzy `StochasticProcess`, przy czym pierwszy wiersz zawiera chwile czasu dyskretnego.

- Wczytać zbiór danych z pliku `StochasticProcess.mat` i wykreślić kilka wybranych realizacji procesu losowego w funkcji czasu dyskretnego.
- Obliczyć estymaty \hat{m}_n oraz $\hat{\sigma}_n^2$ obliczone *po realizacjach* oraz estymaty \hat{m} oraz $\hat{\sigma}^2$ obliczone *po czasie* dla wszystkich dostępnych realizacji procesu losowego.
- Przedstawić na wspólnym wykresie \hat{m}_n oraz \hat{m} , a na oddzielnym wykresie $\hat{\sigma}_n^2$ oraz $\hat{\sigma}^2$. Wyznaczyć wartości średnie dla poszczególnych zbiorów estymat (należy pamiętać, że estymaty są realizacjami zmiennych losowych) i porównać parami otrzymane wyniki obliczone *po realizacjach* i *po czasie*. Czy proces losowy można uważać za stacjonarny i ergodyczny w kontekście analizowanych parametrów?

1.3 Estymaty funkcji korelacji sygnałów. Zdefiniujmy sygnały:

$$e(nT_p) = \sigma \cdot \text{randn}(1, N), \quad (7)$$

$$x(nT_p) = \sin(2\pi \cdot 5nT_p), \quad (8)$$

$$y(nT_p) = \sin(2\pi \cdot 5nT_p) + e(nT_p), \quad (9)$$

$$v(nT_p) = H(q^{-1}) \cdot e(nT_p), \quad (10)$$

gdzie $\sigma^2 \in \{0.64; 1.0\}$ jest wariancją zmiennej losowej (σ to odchylenie standardowe), T_p jest okresem próbkowania (przyjąć: $T_p = 0.001$ s oraz $N = 2000$), natomiast $H(q^{-1}) = 0.1q^{-1}/(1 - 0.9q^{-1})$ reprezentuje dyskretny filtr dolnoprzepustowy przy czym q^{-1} to operator przesunięcia wstecz: $e(n)q^{-1} = e(n - 1)$.

Uwaga: Transmitancję $H(z)$ odpowiadającą operatorowi transmitancyjnemu $H(q^{-1})$ można uzyskać stosując następującą instrukcję: $H = \text{tf}([0.1], [1 - 0.9], T_p)$, gdzie T_p oznacza okres próbkowania T_p . Odpowiedź transmitancji H na wymuszenie e obliczamy następująco: $v = \text{lsim}(H, e, \text{tn})$, gdzie tn jest wektorem chwil czasu dyskretnego ($t_n = nT_p$, $n = 0, 1, \dots$), dla których tę odpowiedź chcemy wyznaczyć.

- Wyświetlić wykresy wszystkich sygnałów w dziedzinie czasu dyskretnego.
- Dla wszystkich sygnałów obliczyć wartości estymatora funkcji autokorelacji (4) dla $\tau \in [0; N - 1]$.
- Korzystając z własności W1 (symetria względem przesunięcia zerowego) dla wszystkich sygnałów wykreślić (na oddzielnych wykresach) przebieg estymaty funkcji autokorelacji dla $\tau \in [-(N - 1); N - 1]$. Zinterpretować uzyskane wyniki i sprawdzić własności W2-W3 funkcji autokorelacji.
- Sprawdzić różnice w przebiegu funkcji autokorelacji przy zastosowaniu estymatora obciążonego oraz *asymptotycznie nieobciążonego* (czynniki $1/(N - \tau)$).
- Porównać przebieg estymaty funkcji autokorelacji sygnału $v(nT_p)$ z przebiegiem uzyskanym dla szumu białego $e(nT_p)$.
- Dla pary sygnałów $y(nT_p)$ i $x(nT_p)$ obliczyć i wykreślić wartości estymatora funkcji korelacji wzajemnej (5) dla $\tau \in [-(N - 1); N - 1]$ (skorzystać w własności W1).

Uwaga. Do obliczeń można skorzystać z gotowej funkcji `Covar(D, tau)`, która oblicza estymatę pojedynczej wartości funkcji kowariancji/korelacji³ dla wartości przesunięcia tau (wyrażonej w liczbie próbek) korzystając z ciągu N próbek sygnałów zawartych w macierzy D . Przykładowo, wywołanie funkcji w postaci `Covar([x y], tau)` dla przesunięcia $\text{tau} \geq 0$ oblicza wartość $\hat{r}_{xy}(\text{tau})$ zgodnie ze wzorem definicyjnym (5), tzn.:

$$\text{Covar}([x \ y], \text{tau}) = \frac{1}{N} \sum_{n=\text{tau}}^{N-1} x(n)y(n - \text{tau}) \quad (11)$$

lub alternatywnie

$$\text{Covar}([y \ x], -\text{tau}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\text{tau}} y(n)x(n + \text{tau}). \quad (12)$$

³Domyślnie wewnątrz funkcji `Covar` wartości średnie sygnałów z macierzy D nie są odejmowane, zatem jest obliczana wartość funkcji korelacji. Po odkomentowaniu tej operacji w ciele funkcji otrzymamy wartość funkcji kowariancji.

2 Analiza sygnałów w dziedzinie częstotliwości

Analiza sygnału w dziedzinie częstotliwości umożliwia sprawdzenie jakie częstotliwości składowe niesie ze sobą dany sygnał i jaka jest energia poszczególnych składowych częstotliwościowych. Narzędziem, które pozwala na taką analizę jest dyskretne przekształcenie Fouriera (ang. *Discrete Fourier Transform*, DFT). W praktycznych zastosowaniach transformatę DFT wyznacza się na podstawie skończonej sekwencji $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ próbek sygnału $x(t)$ obserwowanego w skończonym przedziale czasu ciągłego $t \in [0; (N-1)T_p]$ (skończony przedział obserwacji można rozumieć jako iloczyn sygnału $x(t)$ z prostokątnym oknem czasowym o szerokości równej przedziałowi czasu obserwacji). Jeżeli sekwencja próbek zawiera całkowitą wielokrotność okresów spróbkowanego sygnału $x(t)$, tj. sygnału $x(nT_p)$, wówczas wynik DFT można wprost odnieść do całego sygnału $x(nT_p)$ oraz do oryginalnego sygnału $x(t)$ (przy analizie DFT domyślnie zakłada się, że analizowany sygnał jest okresowy). Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, wówczas w wyniku obliczeń DFT obserwuje się efekt uboczny zwany *wyciekami widma*.

Transformatę DFT skończonej sekwencji próbek $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ sygnału losowego lub deterministycznego można obliczyć wg wzoru⁴:

$$X_N(j\Omega_k) = T_p \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_p) e^{-jn\Omega_k}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k = \omega_k T_p, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

gdzie Ω_k jest k -tą unormowaną pulsacją dyskretną wyrażoną w [rad] i należącą do przedziału $[0; 2\pi)$ dla k zmieniającego się od 0 do $N-1$ (przypomnijmy, że fizycznie interpretowany jest tylko zakres pulsacji równy połowie wspomnianego przedziału wartości czyli dla $\Omega_k \in [0; \pi)$), a wielkość $\Delta\Omega = 2\pi/N$ jest tzw. binem pulsacji określającym rozdzielczość częstotliwościową (zatem rozdzielczość zależy wprost od liczby próbek N). Wartości Ω_k dla poszczególnych $k = 0, 1, \dots, N-1$ określają dyskretny zbiór pulsacji $\{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$, dla których będą obliczone prążki widma analizowanej sekwencji $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ (widmo skończonej sekwencji próbek sygnału wyznaczone za pomocą DFT ma charakter dyskretny). Wzór po prawej stronie (13) pokazuje zależność pomiędzy unormowaną pulsacją Ω_k wyrażoną w [rad] a standardową pulsacją ω_k wyrażoną w [rad/s]. Przeliczenie między obiema pulsacjami jest wyjątkowo proste: $\omega_k = \Omega_k / T_p$. Zwróćmy uwagę, że zakresowi unormowanej pulsacji $[0; \pi)$ odpowiada zakres pulsacji standardowej równy $[0, \frac{\pi}{T_p})$.

Obliczone na podstawie wzoru (13) liczby zespolone $X_N(j\Omega_k)$, dla $k = 0, 1, \dots, N-1$, posiadają czytelną interpretację. Mianowicie moduł $|X_N(j\Omega_k)|$ odpowiada wadze z jaką składowa o pulsacji Ω_k jest zawarta w analizowanej sekwencji $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ (a także w samym sygnale $x(nT_p)$), jeżeli spełniony jest wspomniany wyżej warunek okresowości). Wykres $|X_N(j\omega_k)|$ w funkcji ω_k nazywamy **widmem amplitudowym** sekwencji próbek sygnału. Aby uzyskać amplitudy prążków widma równe amplitudom składowych sinusoidalnych oryginalnego sygnału $x(t)$ (oraz $x(nT_p)$) należy wziąć $2 |X_N(j\Omega_k)| / (NT_p)$; mnożenie przez 2 wynika z interpretowania widma tylko dla połowy zakresu pulsacji Ω_k , tj. dla zakresu $[0; \pi)$ mimo, iż transformacja DFT zwraca wartości dla pełnego zakresu pulsacji unormowanych $\Omega_k \in [0; 2\pi)$.

O mocy niesionej przez sekwencję próbek $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ rozłożonej na poszczególne składowe częstotliwościowe zawarte w tej sekwencji mówi funkcja $\Phi_{xx}(\Omega_k)$ (przyjmująca wartości ze zbioru liczb rzeczywistych) zwana **gęstością widmową mocy** sygnału $x(nT_p)$. Dla ustalonego k , wartość funkcji $\Phi_{xx}(\Omega_k)$ jest proporcjonalna do porcji energii niesionej przez składową o pulsacji Ω_k w analizowanej sekwencji próbek sygnału $x(nT_p)$.

Dla sygnału $x(nT_p)$ o skończonej energii estymator gęstości widmowej mocy można wyznaczyć na podstawie skończonej sekwencji próbek **metodą periodogramową** (bezpośrednią):

$$\hat{\Phi}_{xx}(\Omega_k) = \frac{1}{NT_p} |X_N(j\Omega_k)|^2 \stackrel{(13)}{=} \frac{T_p}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_p) e^{-jn\Omega_k} \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (14)$$

⁴ Jest to wzór zgodny z definicją DFT w środowisku Matlab dla znormalizowanego okresu próbkowania $T_p = 1$.

Powyższy estymator zwany jest też w literaturze **periodogramem**. W kontekście periodogramu (14) warto przypomnieć, że całkowitą energię \mathcal{E}_N niesioną przez sekwencję próbek sygnału $x(nT_p)$ można określić zarówno w dziedzinie czasu jak i w dziedzinie częstotliwości zgodnie z **twierdzeniem Parsevala**:

$$\mathcal{E}_N = T_p \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT_p) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{NT_p} |X_N(j\Omega_k)|^2 \stackrel{(14)}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\Phi}_{xx}(\Omega_k), \quad (15)$$

które mówi, że transformacja DFT zachowuje energię sekwencji próbek sygnału $x(nT_p)$.

Periodogram (14) jest zasadniczo estymatorem o znacznej wariancji (jeżeli jest wyznaczany na podstawie realizacji zmiennych losowych), która nie maleje wraz ze wzrostem liczby N próbek w sekwencji $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ użytej do obliczeń. Estymatorem gęstości widmowej mocy o mniejszej wariancji jest estymator wyznaczany **metodą korelogramową** (pośrednią) w użyciu tzw. okna przesunięciowego:

$$\hat{\Phi}_{xx}^s(\Omega_k) = T_p \sum_{\tau=-M_w}^{M_w} w(\tau) \cdot \hat{r}_{xx}(\tau) \exp(-j\Omega_k \tau), \quad (16)$$

gdzie $w(\tau)$ jest oknem przesunięciowym (symetrycznym względem zera) o szerokości próbkowej równej $2M_w + 1$, natomiast $\hat{r}_{xx}(\tau)$ jest estymatorem funkcji autokorelacji sygnału $x(nT_p)$. W literaturze z zakresu przetwarzania sygnałów podano wiele różnych okien przesunięciowych. Poniżej podajemy definicje dwóch popularnych okien przesunięciowych – okna prostokątnego

$$w_P(\tau) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{dla } |\tau| \leq M_w \\ 0 & \text{dla } |\tau| > M_w \end{cases}, \quad (17)$$

gdzie parametr projektowy $M_w \in (0; N - 1]$ określa szerokość okna, a także okna Hanninga

$$w_H(\tau) \triangleq \begin{cases} 0.5(1 + \cos \frac{\tau\pi}{M_w}) & \text{dla } |\tau| \leq M_w \\ 0 & \text{dla } |\tau| > M_w \end{cases}. \quad (18)$$

Im węższe jest okno, tym większa redukcja wariancji estymatora, ale także tym większa deformacja estymaty gęstości widmowej mocy, ponieważ okno wycina potencjalne informacje zawarte w przebiegu funkcji korelacji poza zakresem okna. Wybór parametru M_w powinien zatem wynikać z kompromisu i do celów identyfikacji zaleca się przyjmować $M_w \leq N/5$.

Okno przesunięciowe $w(\tau)$ we wzorze (16) określa wagi dla poszczególnych wartości estymatora funkcji korelacji. Postać funkcji $w(\tau)$ okna przesunięciowego pozwala ograniczyć wpływ najmniej wiarygodnych (tj. tych obliczanych dla dużych przesunięć $|\tau|$) wartości estymatora funkcji korelacji na wynikowe estymaty gęstości widmowej mocy.

2.1 Gęstości widmowe mocy N -elementowych sekwencji sygnałów. Wprowadźmy następujące sygnały (w praktyce – skończone sekwencje ich próbek):

$$x(nT_p) = \sin(2\pi \cdot 5 nT_p) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 10 nT_p) + 0.25 \sin(2\pi \cdot 30 nT_p), \quad (19)$$

$$e(nT_p) := \sigma \cdot \text{randn}(1, N), \quad (20)$$

$$v(nT_p) = H(q^{-1}) \cdot e(nT_p), \quad (21)$$

gdzie σ^2 jest wariancją szumu, nT_p jest czasem dyskretnym (wyrażonym w sekundach), $T_p = 0.001$ s jest okresem próbkowania, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ jest numerem próbki, natomiast $H(q^{-1}) = 0.1q^{-1}/(1 - 0.9q^{-1})$ reprezentuje dyskretny filtr dolnoprzepustowy przy czym q^{-1} to operator przesunięcia wstecz: $e(n)q^{-1} = e(n - 1)$.

- Wyświetlić wykresy wszystkich sygnałów w dziedzinie czasu dyskretnego.

- Dla $N = 2000$ obliczyć i wykreślić dyskretne widmo amplitudowe $|X_N(j\omega_k)|$ sekwencji próbek $\{x(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ sygnału $x(nT_p)$. Do obliczeń należy wykorzystać funkcję `fft()` środowiska Matlab, która realizuje szybkie obliczenia transformaty DFT dla znormalizowanego okresu próbkowania $T_p = 1$ (dlatego, aby uzyskać wynik ze wzoru (13) wartości zwracane przez funkcję `fft()` należy wymnożyć przez T_p). Przeskalować moduły $|X_N(j\omega_k)|$ tak, aby uzyskać zgodność wysokości prążków widma z amplitudami składowych sinusoidalnych sygnału $x(nT_p)$. Zinterpretować uzyskane wyniki.
- Sprawdzić wpływ liczby $N \in \{1000, 200, 100\}$ próbek sygnału $x(nT_p)$ branych do obliczeń na jakość otrzymywanego widma amplitudowego – wpływ N na rozdzielczość częstotliwościową wyniku oraz na efekt tzw. *wycieku widma* (należy zwrócić uwagę ile próbek mieści się w okresie sygnału $x(nT_p)$).
- Sprawdzić spełnienie twierdzenia Parsewala (15).
- Przyjmując $N = 2000$ obliczyć i wykreślić estymatę gęstości widmowej mocy sekwencji próbek $\{e(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ korzystając niezależnie z obu poznanych estymatorów (14) i (16). Porównać oraz zinterpretować uzyskane wyniki pamiętając, że sygnał $e(nT_p)$ reprezentuje szum biały. Sprawdzić jaki wpływ ma wartość wariancji σ^2 szumu na estymatę gęstości widmowej mocy.
- Sprawdzić wpływ szerokości okna przesunięciowego $w(\tau)$ na jakość estymaty gęstości widmowej mocy wyznaczonej metodą korelogramową ze wzoru (16).
- Przyjmując $N = 2000$ obliczyć i wykreślić estymatę gęstości widmowej mocy sekwencji próbek $\{v(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ korzystając niezależnie z obu poznanych estymatorów. Zinterpretować uzyskane wyniki pamiętając, że $v(nT_p)$ reprezentuje filtrowany szum biały (czyli szum kolorowy).

□